MC-202 — Unidade 18
Árvores B

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2017

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária

- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache
  - Muito próxima do processador para ter acesso rápido

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache
  - Muito próxima do processador para ter acesso rápido
  - A informação é copiada da RAM para a Cache

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3
RAM	2 a 20 GB/s	até 64 GB	7,5

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3
RAM	2 a 20 GB/s	até 64 GB	7,5
Cache	32 a 64 GB/s[1]	até 25 MB	não é vendida

[1] em um processador 2GHz

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento
  - queremos ler o menor número de páginas possível

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento
  - queremos ler o menor número de páginas possível
  - acessar páginas que estão na memória é rápido

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

- LeDoDisco(x): lê x da memória secundária

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

- LeDoDisco(x): lê x da memória secundária
- EscreveNoDisco(x): grava x na memória secundária

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias
  - i.e., a raiz tem M subárvores e a ordem importa

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias
  - i.e., a raiz tem M subárvores e a ordem importa

Uma árvore ordenada é:

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias
  - i.e., a raiz tem M subárvores e a ordem importa

Uma árvore ordenada é:

- Ou o conjunto vazio

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias
  - i.e., a raiz tem M subárvores e a ordem importa

Uma árvore ordenada é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de árvores ordenadas

Árvores ordenadas e Árvores M-árias

Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de duas árvores binárias
  - importa quem é o filho esquerdo e quem é o filho direito

Uma árvore M-ária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de M árvores M-árias
  - i.e., a raiz tem M subárvores e a ordem importa

Uma árvore ordenada é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou nó ligado a uma sequência de árvores ordenadas
  - Não sabemos o número de subárvores

Representação de árvores ordenada

Como representar uma árvore ordenada?

Representação de árvores ordenada

Como representar uma árvore ordenada?

- Não sabemos o número de filhos...

Representação de árvores ordenada

Como representar uma árvore ordenada?

- Não sabemos o número de filhos...
- Cada nó aponta para seu primeiro filho

Representação de árvores ordenada

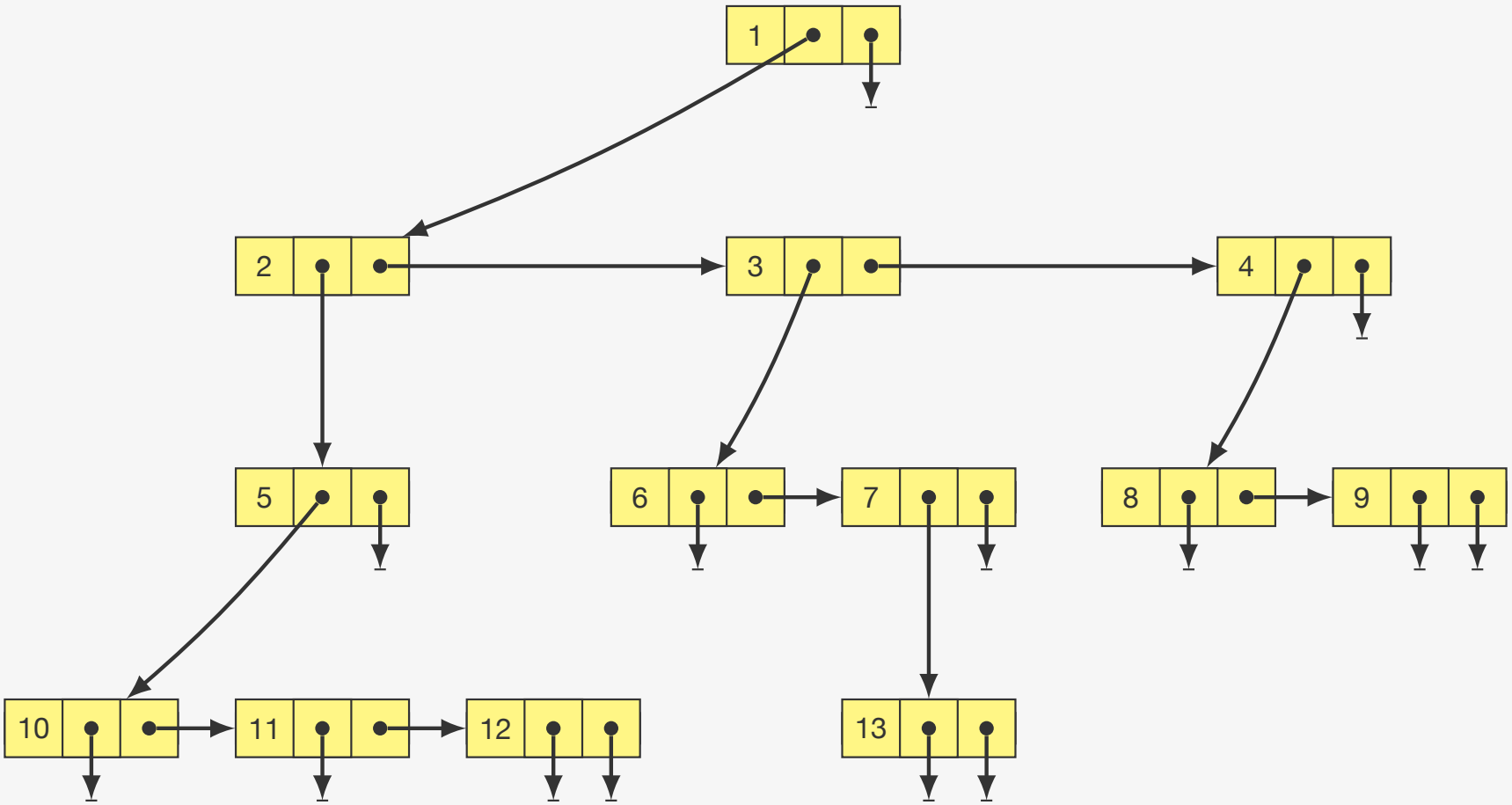
Como representar uma árvore ordenada?

- Não sabemos o número de filhos...
- Cada nó aponta para seu primeiro filho
- E para o seu próximo irmão

Representação de árvores ordenada

Como representar uma árvore ordenada?

- Não sabemos o número de filhos...
- Cada nó aponta para seu primeiro filho
- E para o seu próximo irmão



Representação de árvores M-árias

Árvores M-árias são mais simples de representar

Representação de árvores M-árias

Árvores M-árias são mais simples de representar

- Basta ter um vetor de ponteiros

Representação de árvores M-árias

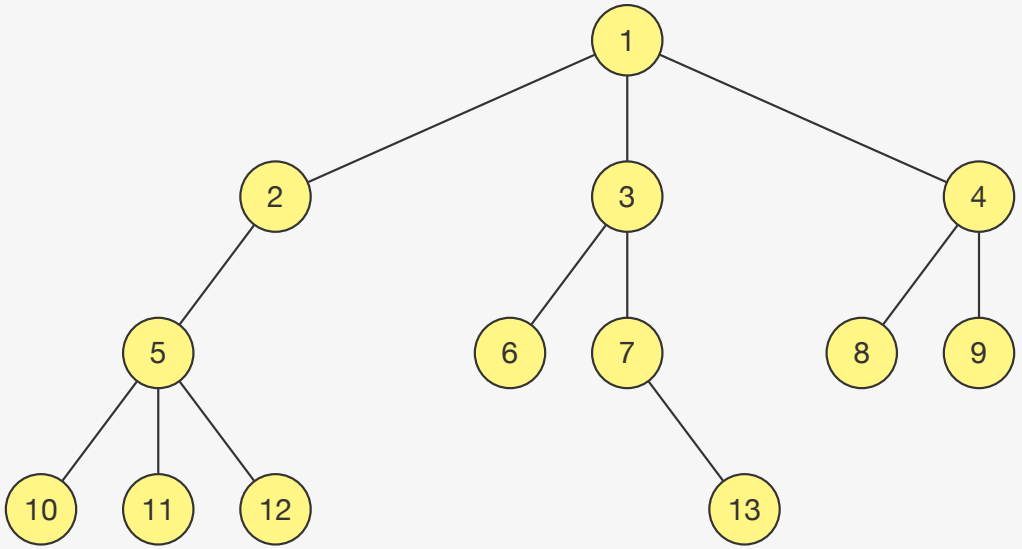
Árvores M-árias são mais simples de representar

- Basta ter um vetor de ponteiros
- A posição i aponta para a i-ésima subárvore

Representação de árvores M-árias

Árvores M-árias são mais simples de representar

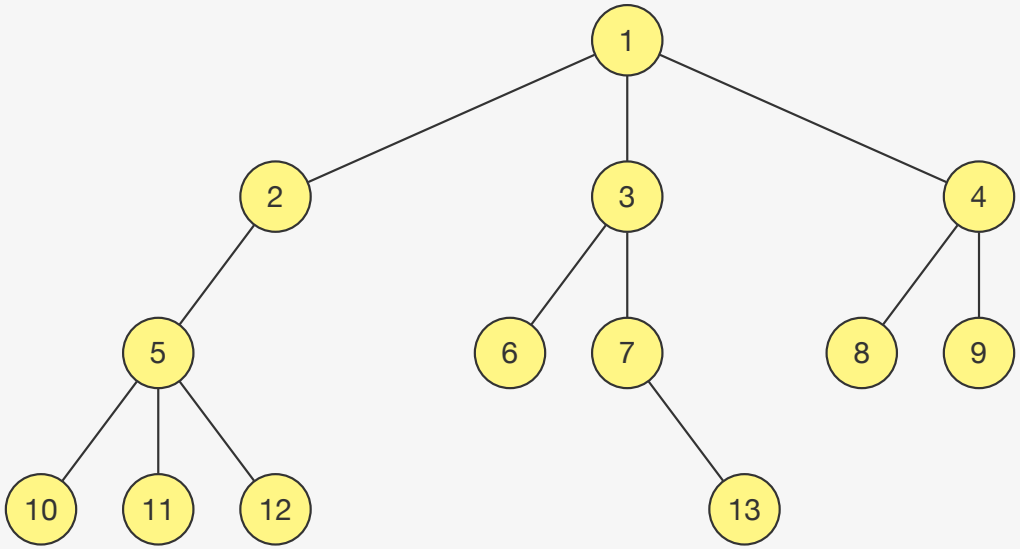
- Basta ter um vetor de ponteiros
- A posição i aponta para a i-ésima subárvore



Representação de árvores M-árias

Árvores M-árias são mais simples de representar

- Basta ter um vetor de ponteiros
- A posição i aponta para a i-ésima subárvore



Usaremos uma árvore M-ária para armazenar dados no disco

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois
- In-ordem: não faz sentido aqui

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois
- In-ordem: não faz sentido aqui
- Em largura: visitamos por níveis

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois
- In-ordem: não faz sentido aqui
- Em largura: visitamos por níveis

A implementação é semelhante ao visto para árvores binárias

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois
- In-ordem: não faz sentido aqui
- Em largura: visitamos por níveis

A implementação é semelhante ao visto para árvores binárias

- para árvores ordenadas pode ficar mais complicado

Percursos

Podemos percorrer árvores ordenadas ou M-árias

- Pré-ordem: raiz primeiro, subárvores em ordem depois
- Pós-ordem: subárvores em ordem primeiro, raiz depois
- In-ordem: não faz sentido aqui
- Em largura: visitamos por níveis

A implementação é semelhante ao visto para árvores binárias

- para árvores ordenadas pode ficar mais complicado
- mas as ideias são basicamente as mesmas

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca

Árvores M-árias de Busca

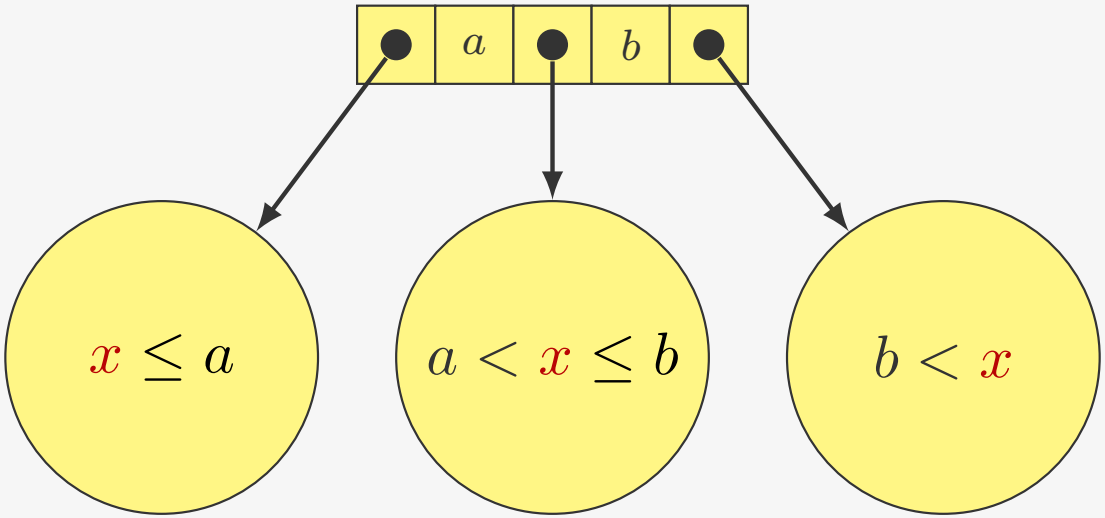
Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

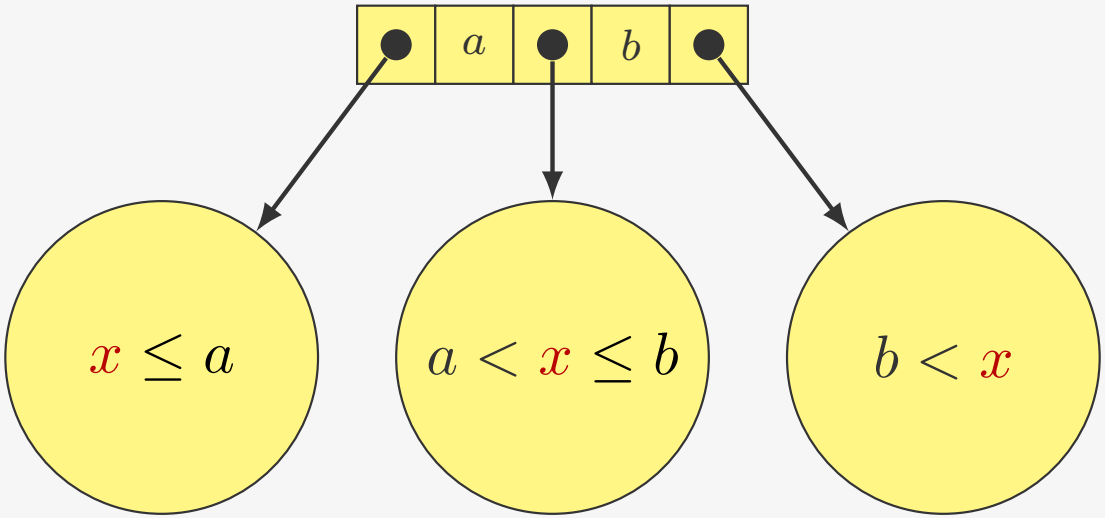
- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos



Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos



Como fazer busca?

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$
  - $x.chave[i\text{-}1] < k < x.chave[i]$ caso contrário

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$
  - $x.chave[i\text{-}1] < k < x.chave[i]$ caso contrário

O $T.raiz$ indica o nó que é a raiz da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos tem pelo menos $2t$ filhos (no total)

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos tem pelo menos $2t$ filhos (no total)
- que tem pelo menos $2t^2$ filhos (no total)

Propriedades das Árvores B

Toda folha está a mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos tem pelo menos $2t$ filhos (no total)
- que tem pelo menos $2t^2$ filhos (no total)
- e assim por diante

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes as árvores **rubro-negras**

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

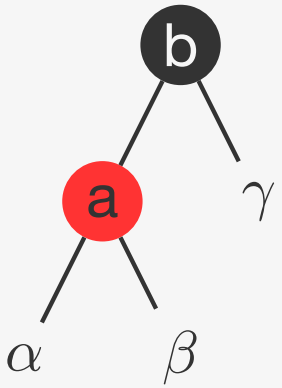
- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes as árvores **rubro-negras**



Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

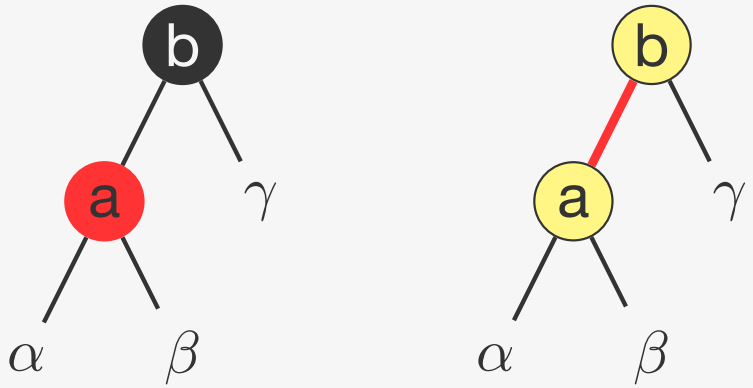
- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes as árvores **rubro-negras**



Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo que um nó com $2t$ filhos caiba na página

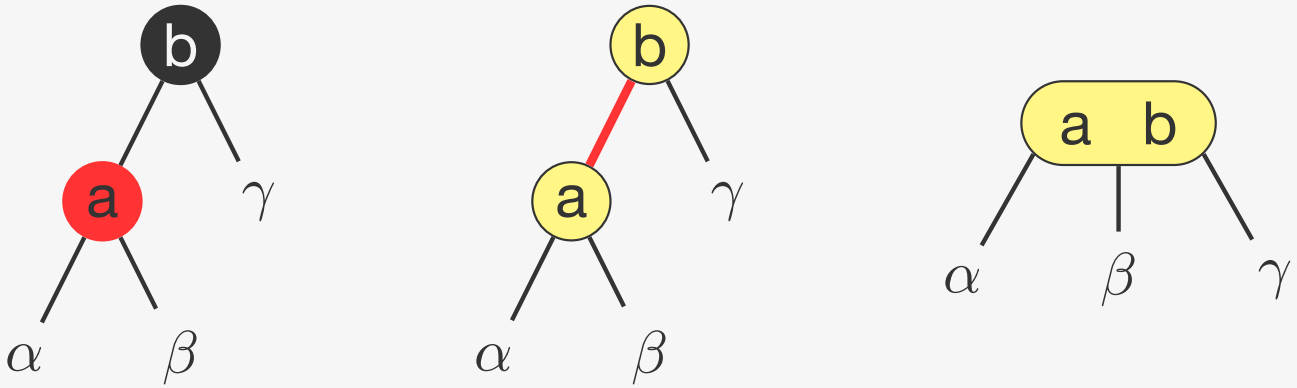
- Se $t = 1001$ com $h = 2$ armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes as árvores **rubro-negras**



Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

```
BUSCA(x, k)
 1  i = 1
 2  enquanto i ≤ x.n e k > x.chave[i]
 3      i = i + 1
 4  se i ≤ x.n e k == x.chave[i]
 5      retorne (x, i)
 6  senão se x.folha
 7      retorne NIL
 8  senão
 9      LEDODISCO(x.c[i])
10      retorne BUSCA(x.c[i], k)
```

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

```
INICIA(T)
1  x = ALOCA()
2  x.folha = VERDADEIRO
3  x.n = 0
4  ESCREVENODISCO(x)
5  T.raiz = x
```

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca está cheio

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca está cheio

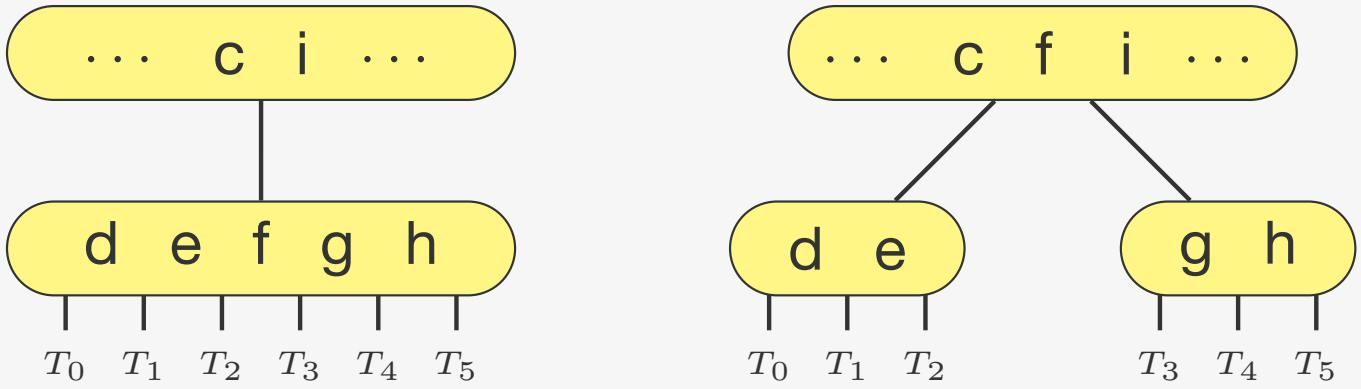
Exemplo: $t = 3$

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca está cheio

Exemplo: $t = 3$



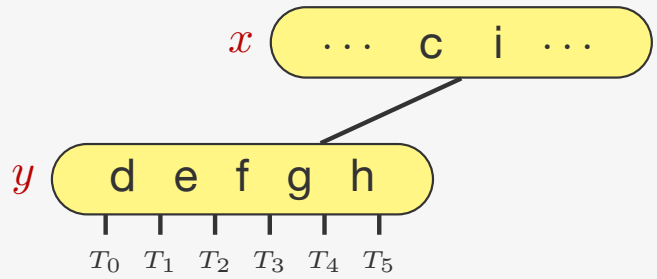
Dividindo um nó

DIVIDEFILHO(x, i)

```
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```

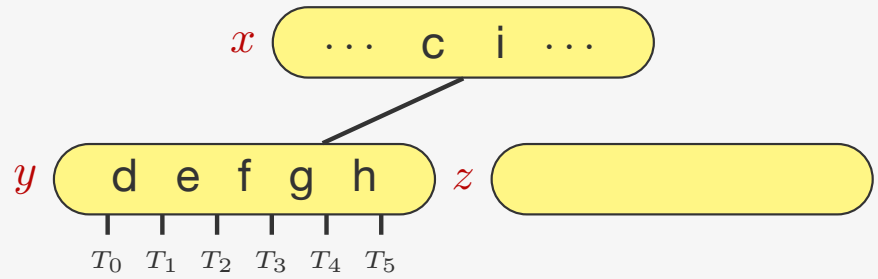
Dividindo um nó

```
DIVIDEFILHO(x, i)
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

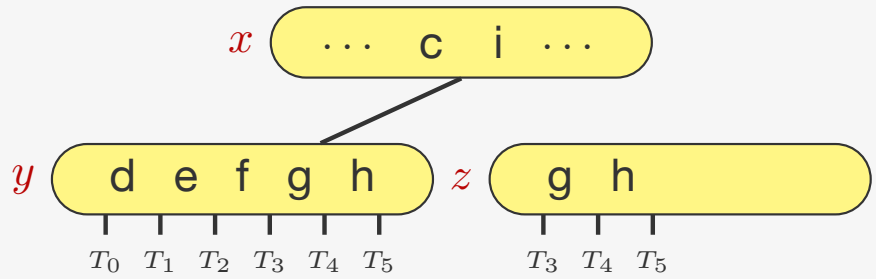
```
DIVIDEFILHO(x, i)
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

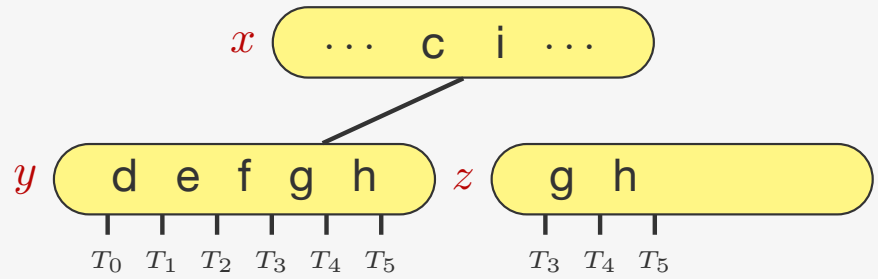
DIVIDEFILHO(x, i)

```
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

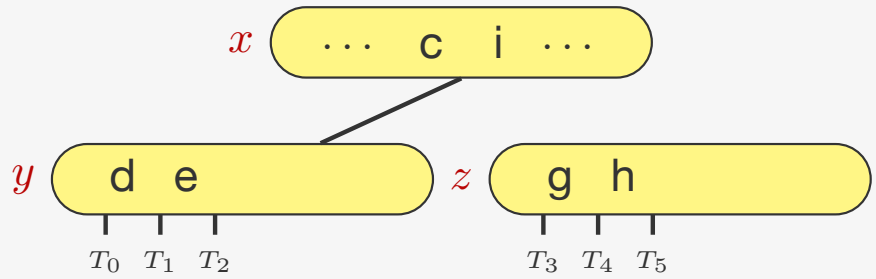
```
DIVIDEFILHO(x, i)
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

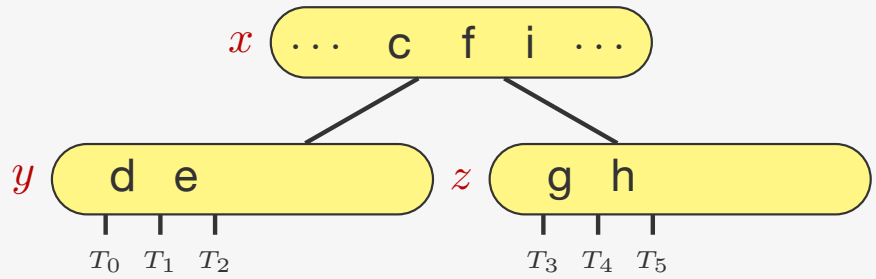
DIVIDEFILHO(x, i)

```
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

```
DIVIDEFILHO(x, i)
 1  z = ALOCA()
 2  y = x.c[i]
 3  z.folha = y.folha
 4  z.n = t − 1
 5  para j = 1 até t − 1
 6      z.chave[j] = y.chave[j + t]
 7  se não y.folha
 8      para j = 1 até t
 9          z.c[j] = y.c[j + t]
10  y.n = t − 1
11  para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
12      x.c[j + 1] = x.c[j]
13  x.c[i + 1] = z
14  para j = x.n decrescendo até i
15      x.chave[j + 1] = x.chave[j]
16  x.chave[i] = y.chave[t]
17  x.n = x.n + 1
18  ESCREVENODISCO(y)
19  ESCREVENODISCO(z)
20  ESCREVENODISCO(x)
```



Inserindo

Vamos inserir a chave k na árvore T

- verificamos se não é necessário dividir a raiz

```
INSERE(T, k)
 1  r = T.raiz
 2  se r.n == 2t − 1
 3      s = ALOCA()
 4      T.raiz = s
 5      s.folha = FALSO
 6      s.n = 0
 7      s.c[1] = r
 8      DIVIDEFILHO(s, 1)
 9      INSERENÃOCHEIO(s, k)
10  senão
11      INSERENÃOCHEIO(r, k)
```

Inserindo chave k em um nó não-cheio x

```
InsereNãoCheio(x, k)
 1  i = x.n
 2  se x.folha
 3     enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
 4        x.chave[i + 1] = x.chave[i]
 5        i = i − 1
 6     x.chave[i + 1] = k
 7     x.n = x.n + 1
 8     EscreveNoDisco(x)
 9  senão
10     enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
11        i = i − 1
12     i = i + 1
13     LeDoDisco(x.c[i])
14     se x.c[i].n == 2t − 1
15        DivideFilho(x, i)
16        se k > x.chave[i]
17           i = i + 1
18     InsereNãoCheio(x.c[i], k)
```

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

O algoritmo tenta resolver esse problema garantindo que os nós no caminho da remoção tem pelo menos t chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

O algoritmo tenta resolver esse problema garantindo que os nós no caminho da remoção tem pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

O algoritmo tenta resolver esse problema garantindo que os nós no caminho da remoção tem pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- nem sempre consegue, mas existe uma solução

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

O algoritmo tenta resolver esse problema garantindo que os nós no caminho da remoção tem pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- nem sempre consegue, mas existe uma solução
- eventualmente junta dois nós vizinhos com $t - 1$ chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

O algoritmo tenta resolver esse problema garantindo que os nós no caminho da remoção tem pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- nem sempre consegue, mas existe uma solução
- eventualmente junta dois nós vizinhos com $t - 1$ chaves
  - formando um nó com $2t - 1$ chaves

Variantes

Árvores B^*:

Variantes

Árvores B^*:

- Nós internos (exceto a raiz) precisam ficar $2/3$ cheios ao invés de $1/2$ cheios

Variantes

Árvores B^*:

- Nós internos (exceto a raiz) precisam ficar $2/3$ cheios ao invés de $1/2$ cheios

Árvores B^+:

Variantes

Árvores B^*:

- Nós internos (exceto a raiz) precisam ficar $2/3$ cheios ao invés de $1/2$ cheios

Árvores B^+:

- Mantém cópias das chaves nos nós internos, mas as chaves e os registros são armazenados nas folhas

Exercício

Considere a seguinte `struct` usada para representar um nó de uma árvore ordenada

```
1 typedef struct No {
2   int dado;
3   No * primeiro_filho, proximo_irmao;
4 } No;
5
6 typedef No * p_no;
```

Faça uma função que percorre uma árvore ordenada em pré-ordem

Faça uma função que percorre uma árvore ordenada em pós-ordem