# MC-202 — Unidade 9 Aplicações de Pilhas

Rafael C. S. Schouery rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2° semestre/2017

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

• dizemos que estão balanceados

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:
  - -(a+b)

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/(d-e))$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

• Exemplos incorretos:

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

- Exemplos incorretos:
  - -(a+b)

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

• Exemplos incorretos:

$$\begin{array}{l} - \ (a+b \\ - \ (a\cdot b) + (c/d-e)) \end{array}$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

• Exemplos incorretos:

$$\begin{array}{l} -\ (a+b \\ -\ (a\cdot b) + (c/d-e)) \\ -\ )a+b(\end{array}$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

Exemplos incorretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/d - e)$$

$$- (a \cdot b) + (c/d - e)$$

Escreva uma função que dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

Exemplos incorretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/d - e)$$

$$- (a \cdot b) + (c/d - e)$$

Escreva uma função que dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

• Vamos ignorar operandos e operadores

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão corretos

- dizemos que estão balanceados
- Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$
  
 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$ 

Exemplos incorretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/d - e)$$

$$- (a \cdot b) + (c/d - e)$$

Escreva uma função que dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

- Vamos ignorar operandos e operadores
- ()(())

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)

A concatenação de duas sequências válidas

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

Para testar, leia cada símbolo e se:

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

Para testar, leia cada símbolo e se:

1. leu ( ou [: empilha o símbolo lido

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

```
Balanceada | Não Balanceada | ([] [ [ ] ] | [ [ ] ) | ( [ ] ) ] | ( [ ] ) ]
```

Para testar, leia cada símbolo e se:

- 1. leu ( ou [: empilha o símbolo lido
- 2. leu]: desempilha[

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

Para testar, leia cada símbolo e se:

- 1. leu (ou [: empilha o símbolo lido
- 2. leu]: desempilha[
- 3. leu): desempilha (

Uma sequência de parênteses é balanceada se é:

```
vazia ou [sequência válida] ou (sequência válida)
A concatenação de duas sequências válidas
```

#### Exemplos:

Para testar, leia cada símbolo e se:

- 1. leu ( ou [: empilha o símbolo lido
- 2. leu]: desempilha[
- 3. leu): desempilha (

Se alguma etapa falhar ou pilha não terminar vazia, a sequência é inválida

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2  p_pilha pilha;
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2   p_pilha pilha;
3   int i, ok = 1;
4   char par;
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    p_pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    p_pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7        if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    p_pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7        if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
8        empilhar(pilha, str[i]);
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    p_pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7        if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
8        empilhar(pilha, str[i]);
9    else {
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    p_pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7        if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
8             empilhar(pilha, str[i]);
9        else {
10        par = desempilhar(pilha);
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
3 int i, ok = 1;
4
   char par;
5 p_pilha = criar_pilha();
6 for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
        empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
        par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
          ok = 0:
12
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
3 int i, ok = 1;
4
   char par;
5 p_pilha = criar_pilha();
6 for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
        empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
        par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
          ok = 0:
12
        if (str[i] == ')' && par != '(')
13
          ok = 0:
14
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
   int i, ok = 1;
3
4
   char par;
5
   p_pilha = criar_pilha();
   for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
        empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
        par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
          ok = 0:
12
        if (str[i] == ')' && par != '(')
13
14
          ok = 0;
15
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
   p_pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
         empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
         par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
           ok = 0:
12
         if (str[i] == ')' && par != '(')
13
14
           ok = 0:
15
    if (!eh_vazia(pilha))
16
      ok = 0:
17
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
3
    int i, ok = 1;
4
   char par;
5
   p_pilha = criar_pilha();
   for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
         empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
         par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
           ok = 0:
12
        if (str[i] == ')' && par != '(')
13
14
           ok = 0:
15
    if (!eh_vazia(pilha))
16
      ok = 0:
17
    destruir_pilha(pilha);
18
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
   p_pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
         empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
        par = desempilhar(pilha);
10
        if (str[i] == ']' && par != '[')
11
           ok = 0:
12
        if (str[i] == ')' && par != '(')
13
14
           ok = 0:
15
    if (!eh_vazia(pilha))
16
      ok = 0:
17
    destruir_pilha(pilha);
18
    return ok;
19
20 }
```

```
1 int eh balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
   int i, ok = 1;
4
    char par;
5
   p_pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(')
7
         empilhar(pilha, str[i]);
8
9
      else {
         par = desempilhar(pilha);
10
         if (str[i] == ']' && par != '[')
11
           ok = 0:
12
         if (str[i] == ')' && par != '(')
13
           ok = 0:
14
15
    if (!eh_vazia(pilha))
16
       ok = 0:
17
    destruir_pilha(pilha);
18
    return ok:
19
20 }
```

• E se usássemos return 0 dentro do for?

# Notação de expressões

### Exemplo 1:

• Infixa: a + b

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 1: Exemplo 2:

• Infixa: a + b

• Pré-fixa: + a b

• Pós-fixa: a b +

Exemplo 1:

Exemplo 2:

• Infixa: a + b

• Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)

• Pré-fixa: + a b

• Pós-fixa: a b +

Ę

#### Exemplo 1:

#### Exemplo 2:

Infixa: a + b

• Infixa: 5 \* ((9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)

- Pré-fixa: + a b
   Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b +

#### Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b

#### Exemplo 2:

- Infixa: 5 \* ((9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b + Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

#### Exemplo 1:

#### Exemplo 2:

Infixa: a + b

• Infixa: 5 \* ((9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)

- Pré-fixa: + a b
   Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
   Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

Exemplo 1: Exemplo 2:

• Infixa: a + b • Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)

Pré-fixa: + a b
 Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7

Pós-fixa: a b +
 Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

Notação de expressões aritméticas:

1. Infixa: é a notação cotidiana

### Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +
- Infixa: 5 \* ((9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade

### Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +
- Infixa: 5 \* ((9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade

Exemplo 1: Exemplo 2:

• Infixa: a + b • Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)

Pré-fixa: + a b
 Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7

Pós-fixa: a b +
 Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz

Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
   Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
   Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
  - Operador precede operandos

Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
   Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
   Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
  - Operador precede operandos

Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
   Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b + Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
  - Operador precede operandos
- 3. Pós-fixa: é notação polonesa reversa (RPN), das calculadoras HP, ...

### Exemplo 1: Exemplo 2:

• Infixa: a + b

- Infixa: 5 \* ( (9 + 8) \* 4 \* 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
- Pré-fixa: \* 5 + \* + 9 8 \* 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 \* \* 7 + \*

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
  - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
  - Operador precede operandos
- 3. Pós-fixa: é notação polonesa reversa (RPN), das calculadoras HP, ...
  - Operador sucede operandos

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

$$2 * (3 * 4 + 1)$$

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

$$2 * (12 + 1)$$

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 2

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 2 1

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 3

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 3 4

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 12

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 12 1

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 13

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

- Infixa: 2 \* ((2 + 1) \* 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 \* 1 + \*

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

26

Pseudocódigo:

1. Para cada elemento lido:

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n
  - Se for operador ⊕:

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n
  - Se for operador ⊕:
    - desempilha operando<sub>1</sub>

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n
  - Se for operador ⊕:
    - desempilha operando<sub>1</sub>
    - desempilha operando<sub>2</sub>

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n
  - Se for operador ⊕:
    - desempilha operando1
    - desempilha operando<sub>2</sub>
    - empilha  $operando_2 \oplus operando_1$

- 1. Para cada elemento lido:
  - Se for número n:
    - empilha n
  - Se for operador ⊕:
    - desempilha operando1
    - desempilha operando<sub>2</sub>
    - empilha  $operando_2 \oplus operando_1$
- 2. Desempilha (único) valor da pilha e retorna

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

#### Ideia:

Copiamos os números diretamente na saída

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada

#### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada

#### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída

#### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

#### Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

### Observações:

### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

#### Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

#### Observações:

Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".

### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

#### Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

### Observações:

- Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".
  - É possível fazer sem?

#### Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

#### Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

#### Observações:

- Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".
  - É possível fazer sem?
- Como generalizar para o caso em que a expressão tem parênteses?

### Pilhas e recursão

Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

### Pilhas e recursão

Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

```
1 int fat(int n) {
2   int ret, ant;
3   if (n == 0)
4    ret = 1;
5   else {
6    ant = fat(n-1);
7    ret = n * ant;
8   }
9   return ret;
10 }
```

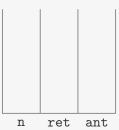
## Pilhas e recursão

Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

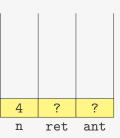
```
1 int fat(int n) {
2   int ret, ant;
3   if (n == 0)
4    ret = 1;
5   else {
6    ant = fat(n-1);
7    ret = n * ant;
8   }
9   return ret;
10 }
```

Vamos tentar descobrir simulando uma chamada: fat(4)

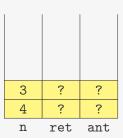
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7        ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



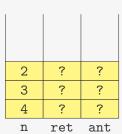
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2 int ret, ant;
3 if (n == 0)
    ret = 1;
5 else {
6 ant = fat(n-1);
    ret = n * ant;
   }
8
    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

0	?	?
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	?	?
n	ret	ant

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

0	1	?
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	?	?
n	ret	ant

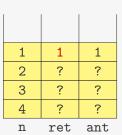
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

0	1	?
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	?	?
n	ret	ant

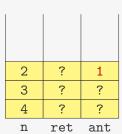
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



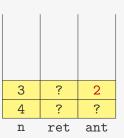
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



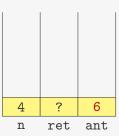
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



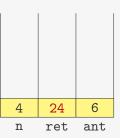
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



Quando empilhamos:

### Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando desempilhamos:

### Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

#### Quando desempilhamos:

 Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais

#### Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

### Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

#### Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

### Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

O conjunto de variáveis locais formam um elemento da pilha

#### Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

### Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

O conjunto de variáveis locais formam um elemento da pilha

Isto é, a recursão pode ser simulada usando uma pilha de suas variáveis locais

# Um exemplo mais complexo: Torres de Hanói



```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2    if (n > 0) {
3        hanoi(n-1, orig, aux, dest);
4        printf("move de %c para %c\\n", orig, dest);
5        hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6    }
7 }
```

# Um exemplo mais complexo: Torres de Hanói



```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2   if (n > 0) {
3     hanoi(n-1, orig, aux, dest);
4     printf("move de %c para %c\\n", orig, dest);
5     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6   }
7 }
```

Precisamos além de empilhar a variáveis locais, armazenar em qual linha devemos voltar a execução do código

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

1. Variáveis locais

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

- 1. Variáveis locais
- 2. Endereço de retorno após a chamada

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

- 1. Variáveis locais
- 2. Endereço de retorno após a chamada

A pilha de execução (ou pilha de chamadas) é a pilha dos registros de ativação das várias chamadas em execução em um programa

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

### Note que:

• a recursão é a última coisa antes do retorno da função

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., apenas retornamos o valor de busca\_rec(lista->prox,x) sem manipulá-lo

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., apenas retornamos o valor de busca\_rec(lista->prox,x) sem manipulá-lo
- exceto na base, o retorno n\u00e3o depende do valor das vari\u00e1veis locais

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., apenas retornamos o valor de busca\_rec(lista->prox,x) sem manipulá-lo
- exceto na base, o retorno n\u00e3o depende do valor das vari\u00e1veis locais
  - Depende apenas do valor da chamada recursiva

# Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

# Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

# Eliminação de Recursão

### Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

#### Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if(lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

#### Eliminando a recursão:

```
1 p_no busca_iterativa(p_no lista, int x) {
2   while(lista != NULL && lista->dado != x)
3          lista = lista->prox;
4   return lista;
5 }
```

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

podemos reiterar a função f(x) usando x = y

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f(x) usando x = y
- usando um while

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f(x) usando x = y
- usando um while
- até chegar em uma das bases da recursão

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f (x) usando x = y
- usando um while
- até chegar em uma das bases da recursão

Chamamos esse tipo de recursão de recursão de cauda

# Recursão geral

Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                               2 int ret, ant;
      char aux) {
                                                  if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                  ret = 1;
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                  else {
     printf("move de %c para %c\\n", orig,
                                                     ant = fat(n-1);
       dest):
                                                     ret = n * ant;
5
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6
                                                   return ret;
                                               9
                                               10 }
```

#### Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                   if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                      ret = 1;
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                   else {
      printf("move de %c para %c\\n", orig,
                                                       ant = fat(n-1);
       dest):
                                                      ret = n * ant;
5
      hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6
                                                    return ret;
                                                9
                                                10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

#### Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                3 if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                      ret = 1;
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                  else {
     printf("move de %c para %c\\n", orig,
                                                      ant = fat(n-1);
       dest):
                                                      ret = n * ant;
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                9
                                                    return ret;
                                               10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

• Porém é necessário utilizar uma pilha

#### Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                3 if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                      ret = 1;
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                  else {
     printf("move de %c para %c\\n", orig,
                                                      ant = fat(n-1);
       dest):
                                                      ret = n * ant;
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                9
                                                    return ret;
                                               10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

- Porém é necessário utilizar uma pilha
- E o processo é mais trabalhoso

Algoritmos recursivos:

Algoritmos recursivos:

• mais fáceis de entender e de criar

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

#### Algoritmos iterativos:

Normalmente mais rápidos do que os recursivos

#### Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

#### Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

#### Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

#### Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

#### Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

#### Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

• E é feita automaticamente por alguns compiladores

#### Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

#### Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

E é feita automaticamente por alguns compiladores

"We should forget about small efficiencies, say about 97% of the time: premature optimization is the root of all evil. Yet we should not pass up our opportunities in that critical 3%"

Donald E. Knuth

### Exercício

#### Elimine a recursão da busca binária:

```
1 int busca_binaria(int *dados, int 1, int r, int x) {
    int m = (1+r)/2;
    if (1 > r)
3
     return -1;
    if (dados[m] == x)
      return m;
6
7
    else if (dados[m] < x)</pre>
      return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
8
9
    else
      return busca_binaria(dados, 1, m - 1, x);
10
11 }
```