

MC-202 — Unidade 4

Noções de Eficiência de Algoritmos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2017

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento
- do valor de n

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento
- do valor de n
 - $n = 10$ vs $n = 10.000$

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento
- do valor de n
 - $n = 10$ vs $n = 10.000$
- da posição de x no vetor

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento
- do valor de n
 - $n = 10$ vs $n = 10.000$
- da posição de x no vetor
 - no melhor caso, a linha 4 é executada 1 vez

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
 - computador rápido vs lento
- do valor de n
 - $n = 10$ vs $n = 10.000$
- da posição de x no vetor
 - no melhor caso, a linha 4 é executada 1 vez
 - no pior caso, a linha 4 é executada n vezes

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o **pior** caso do algoritmo

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o **pior** caso do algoritmo

- A análise do **melhor** caso pode ser interessante, mas é rara

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o **pior** caso do algoritmo

- A análise do **melhor** caso pode ser interessante, mas é rara
- A análise do caso **médio** é mais difícil

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o **pior** caso do algoritmo

- A análise do **melhor** caso pode ser interessante, mas é rara
- A análise do caso **médio** é mais difícil
 - É uma análise probabilística

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o **pior** caso do algoritmo

- A análise do **melhor** caso pode ser interessante, mas é rara
- A análise do caso **médio** é mais difícil
 - É uma análise probabilística
 - Precisamos fazer suposições sobre os dados de entrada

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {  
2     int i;  
3     for (i = 0; i < n; i++)  
4         if (v[i] == x)  
5             return i;  
6     return -1;  
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)
 - No pior caso, essa linha é executada n vezes

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)
 - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e return)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)
 - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e return)
- Linha 6: tempo c_6 (return)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)
 - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e return)
- Linha 6: tempo c_6 (return)

O tempo de execução é menor ou igual a

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < n; i++)
4         if (v[i] == x)
5             return i;
6     return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (alocação de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
 - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e if)
 - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e return)
- Linha 6: tempo c_6 (return)

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 = c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned}c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n\end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned}c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n\end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned}c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n\end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned}c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n\end{aligned}$$

Isto é, o crescimento do tempo é linear em n

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n , depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned}c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n\end{aligned}$$

Isto é, o crescimento do tempo é linear em n

- Se n dobra, o tempo de execução praticamente dobra

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da **ordem de n**

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da **ordem de n**

- A **ordem de crescimento** do tempo é igual a de $f(n) = n$

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da **ordem de n**

- A **ordem de crescimento** do tempo é igual a de $f(n) = n$

Dizemos que

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 = O(n)$$

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da **ordem de n**

- A **ordem de crescimento** do tempo é igual a de $f(n) = n$

Dizemos que

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 = O(n)$$

Veremos uma definição formal de $O(\cdot)$ em breve...

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
 - operações aritméticas, comparações e return

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
 - operações aritméticas, comparações e return

Consumo de tempo é no máximo ct

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
 - operações aritméticas, comparações e return

Consumo de tempo é no máximo ct

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
 - operações aritméticas, comparações e return

Consumo de tempo é no máximo $ct \leq c + c \lg n$

Busca Binária

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Precisamos resolver o problema recursivamente

- para um vetor com metade do tamanho
- paramos, no pior caso, no primeiro t tal que $n/2^t < 1$
 - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
 - operações aritméticas, comparações e return

Consumo de tempo é no máximo $ct \leq c + c \lg n = O(\lg n)$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$
 - Vamos dizer que o algoritmo é $O(f(n))$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$
 - Vamos dizer que o algoritmo é $O(f(n))$
- Comparar dois algoritmos

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$
 - Vamos dizer que o algoritmo é $O(f(n))$
- Comparar dois algoritmos
 - Busca linear é $O(n)$ e busca binária é $O(\lg n)$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$
 - Vamos dizer que o algoritmo é $O(f(n))$
- Comparar dois algoritmos
 - Busca linear é $O(n)$ e busca binária é $O(\lg n)$
 - Veremos que um algoritmo $O(\lg n)$ é melhor que um $O(n)$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
 - Exemplo: busca linear é $O(n)$
 - Vamos dizer que o algoritmo é $O(f(n))$
- Comparar dois algoritmos
 - Busca linear é $O(n)$ e busca binária é $O(\lg n)$
 - Veremos que um algoritmo $O(\lg n)$ é melhor que um $O(n)$
 - Prova formal que um algoritmo é melhor que o outro

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$ e $g(n) = n$

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$ e $g(n) = n$
- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$ e $g(n) = n$
- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

f e g podem ser os tempos de execução de dois algoritmos

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$ e $g(n) = n$
- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

f e g podem ser os tempos de execução de dois algoritmos

- $f(n) = dn$ e $g(n) = c + c \lg n$

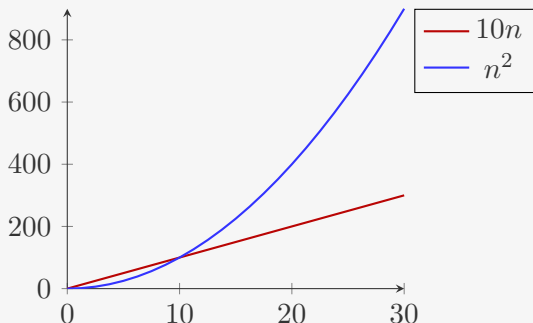
Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo n

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo n

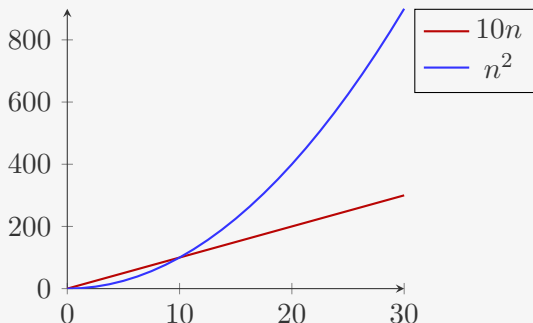
Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$

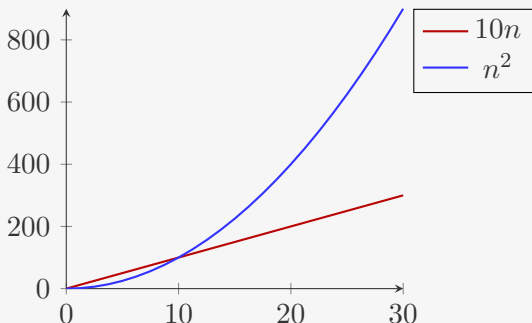


Solução: Ao invés de comparar todo n , comparar apenas n suficientemente grande

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



Solução: Ao invés de comparar todo n , comparar apenas n suficientemente grande

- Para todo $n \geq n_0$ para algum n_0

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

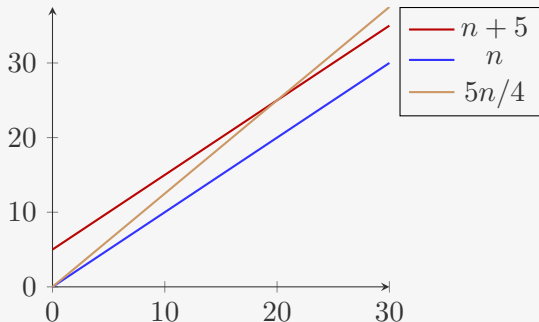
- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes

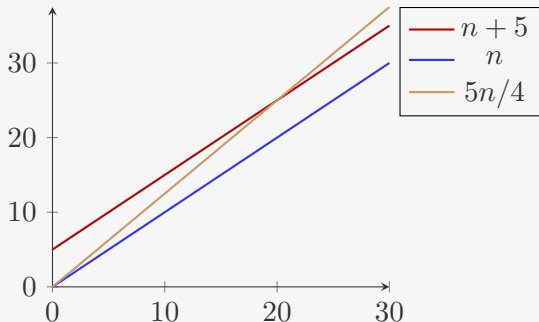


Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes



Solução: Ao invés de comparar f com g , comparar com $c \cdot g$, onde c é uma constante

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

- existe uma constante c

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

- existe uma constante c
- existe uma constante n_0

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

- existe uma constante c
- existe uma constante n_0

tal que

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

- existe uma constante c
- existe uma constante n_0

tal que

$$f(n) \leq c \cdot g(n), \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = O(g(n))$ se

- existe uma constante c
- existe uma constante n_0

tal que

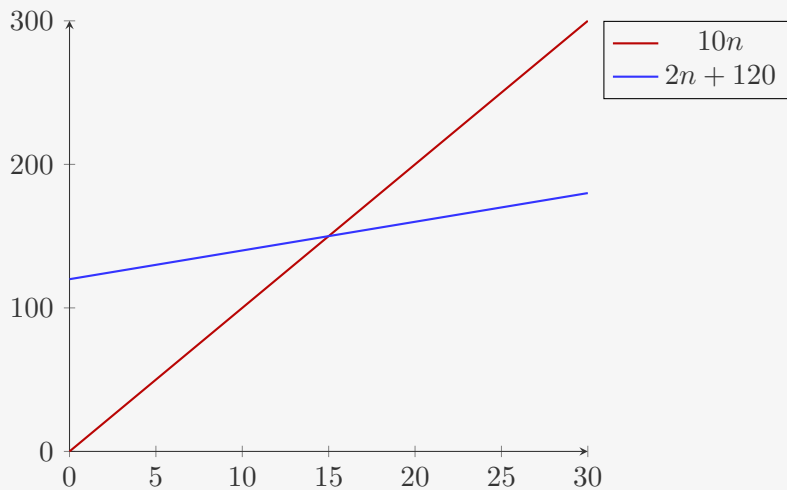
$$f(n) \leq c \cdot g(n), \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

$f(n) = O(g(n))$ se, para todo n suficientemente grande, $f(n)$ é menor ou igual a um múltiplo de $g(n)$

Exemplo: $2n + 120 = O(n)$

Exemplo: $2n + 120 = O(n)$

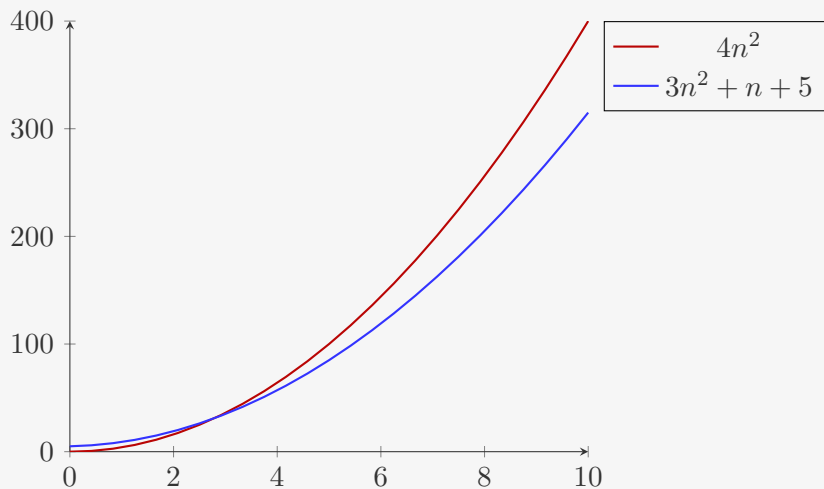
Basta escolher, por exemplo, $c = 10$ e $n_0 = 15$



Exemplo: $3n^2 + n + 5 = O(n^2)$

Exemplo: $3n^2 + n + 5 = O(n^2)$

Basta escolher, por exemplo, $c = 4$ e $n_0 = 4$



Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

$$\log_2 n = O(\log_{10} n)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

$$\log_2 n = O(\log_{10} n)$$

$$\log_{10} n = O(\log_2 n)$$

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor
- $O(\lg n)$: logarítmico

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor
- $O(\lg n)$: logarítmico
 - \lg indica \log_2

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
 - \lg indica \log_2
 - quando n dobra, o tempo aumenta em 1

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor
- $O(\lg n)$: logarítmico
 - \lg indica \log_2
 - quando n dobra, o tempo aumenta em 1
 - Ex: Busca binária

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
 - não depende de n
 - Ex: atribuição e leitura de uma variável
 - Ex: operações aritméticas: +, -, *, /
 - Ex: comparações (<, <=, ==, >=, >, !=)
 - Ex: operadores booleanos (&&, &, ||, |, !)
 - Ex: acesso a uma posição de um vetor
- $O(\lg n)$: logarítmico
 - \lg indica \log_2
 - quando n dobra, o tempo aumenta em 1
 - Ex: Busca binária
 - Outros exemplos durante o curso

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
 - quando n dobra, o tempo quadriplica

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
 - quando n dobra, o tempo quadriplica
 - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
 - quando n dobra, o tempo quadriplica
 - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort
- $O(n^3)$: cúbico

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
 - quando n dobra, o tempo quadriplica
 - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort
- $O(n^3)$: cúbico
 - quando n dobra, o tempo octuplica

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
 - quando n dobra, o tempo dobra
 - Ex: Busca linear
 - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
 - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
 - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
 - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
 - quando n dobra, o tempo quadriplica
 - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort
- $O(n^3)$: cúbico
 - quando n dobra, o tempo octuplica
 - Ex: multiplicação de matrizes $n \times n$

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2 \dots$

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Ou seja, podemos ter feito uma análise folgada

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Ou seja, podemos ter feito uma análise folgada

- achamos que o algoritmo é muito pior do que é realmente

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é **menor ou igual** a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Ou seja, podemos ter feito uma análise folgada

- achamos que o algoritmo é muito pior do que é realmente

No curso, não faremos análises folgadas

Exercícios

1. Mostre que $n + \lg n = O(n)$

Exercícios

1. Mostre que $n + \lg n = O(n)$
2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$

Exercícios

1. Mostre que $n + \lg n = O(n)$
2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
 - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$

Exercícios

1. Mostre que $n + \lg n = O(n)$
2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
 - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$
3. Mostre que $42n = O(n^2)$ mas que $n^2 \neq O(42n)$

Exercícios

1. Mostre que $n + \lg n = O(n)$
2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
 - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$
3. Mostre que $42n = O(n^2)$ mas que $n^2 \neq O(42n)$
 - Essa análise é folgada, já que $42n = O(n)$