MC918/MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
schouery@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2014

Introdução

Introdução

O que é um jogo?

Introdução

O que é um jogo?

O que é a Teoria dos Jogos?

Introdução

O que é um jogo?

O que é a Teoria dos Jogos?

- Estudo da interação entre agentes e dos resultados que possam ocorrer a partir dessa interação

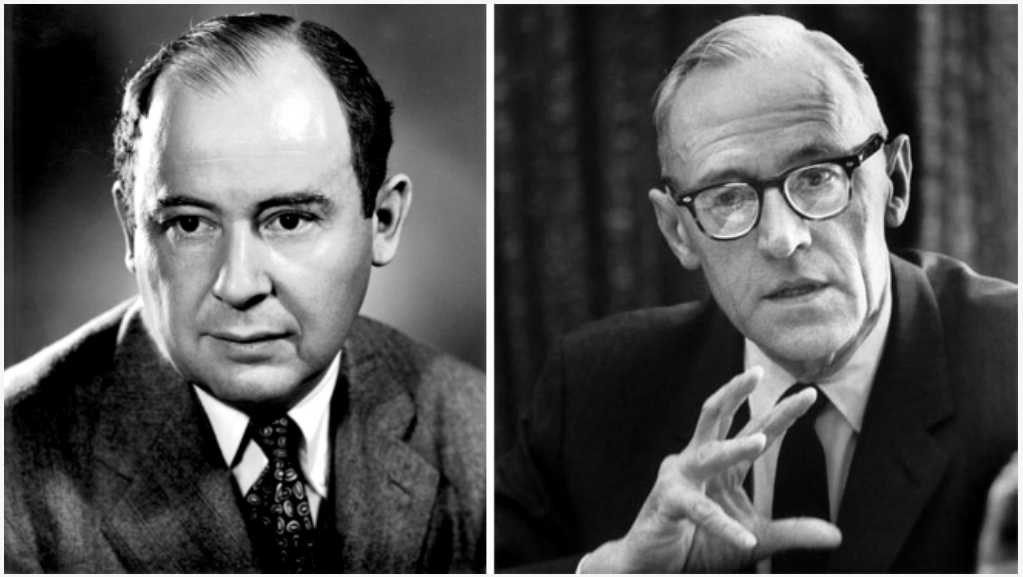
Introdução

O que é um jogo?

O que é a Teoria dos Jogos?

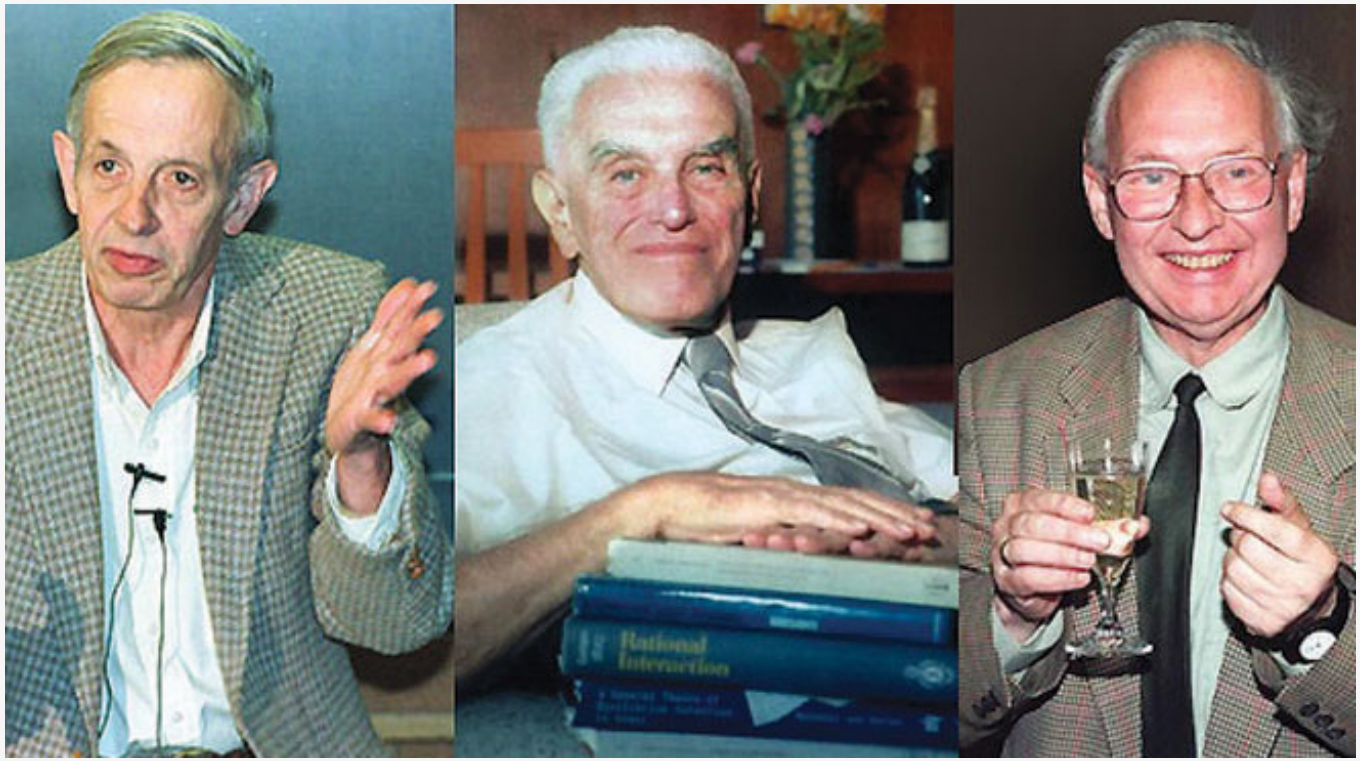
- Estudo da interação entre agentes e dos resultados que possam ocorrer a partir dessa interação

Theory of Games and Economic Behavior,
von Neumann e Morgenstern (1944)



Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 1994

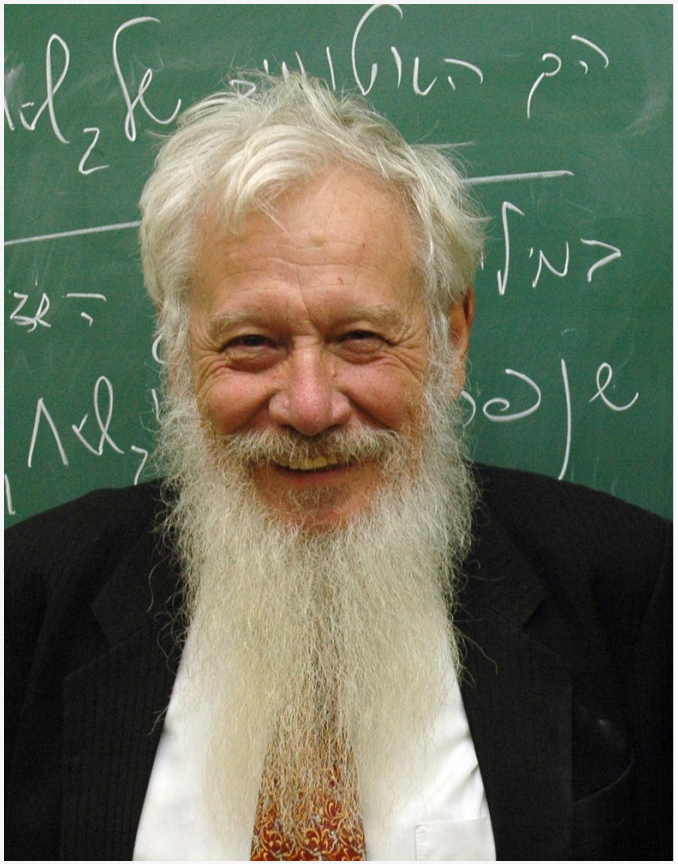
Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 1994



Nash, Harsanyi e Selten: ``*for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games*''

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2005

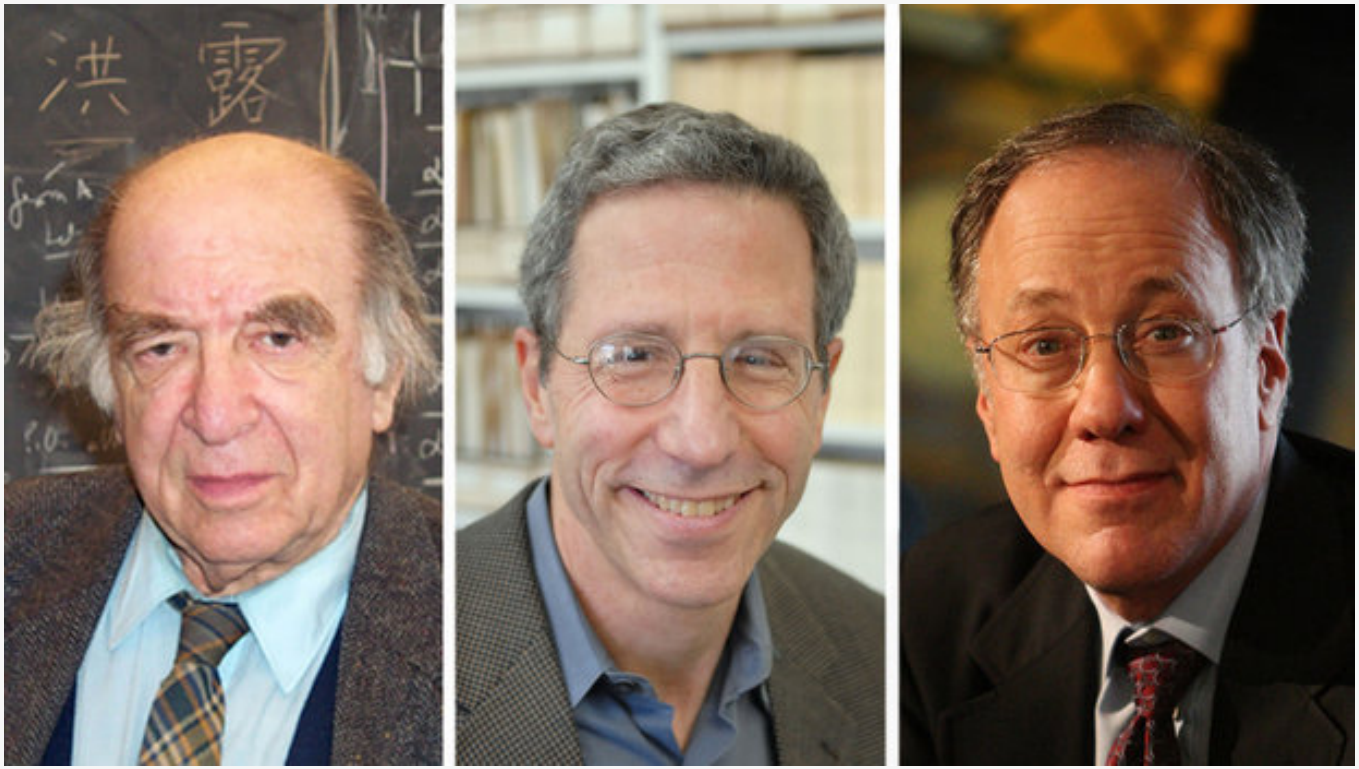
Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2005



Aumann e Schelling: ``*for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis.*''

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2007

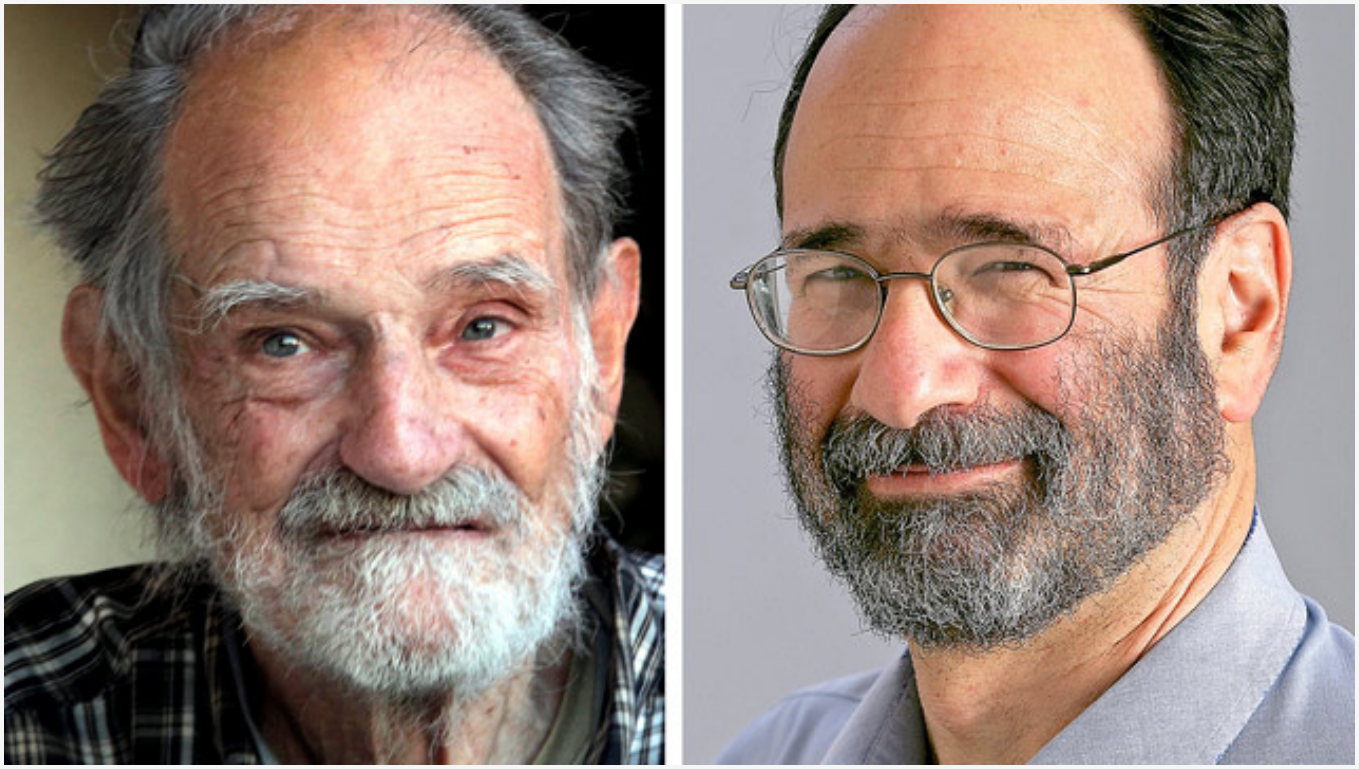
Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2007



Hurwicz, Maskin e Myerson: ``*for having laid the foundations of mechanism design theory.*''

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2012

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2012



Roth e Shapley: ``*for the theory of stable allocations and the practice of market design.*''

Teoria dos Jogos para Computólogos

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Nisan e Ronen, Algorithmic Mechanism Design, STOC'99:

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Nisan e Ronen, Algorithmic Mechanism Design, STOC'99:
``We consider algorithmic problems ... where the participants cannot be assumed to follow the algorithm but rather their own self-interest. ... the algorithm designer should ensure in advance that the agents' interests are best served by behaving correctly.''

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Roteamento

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Roteamento
- Empacotamento

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Roteamento
- Empacotamento

Podem ser repensados utilizando a Teoria dos Jogos

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado
- Decidir como distribuir n itens a m jogadores

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

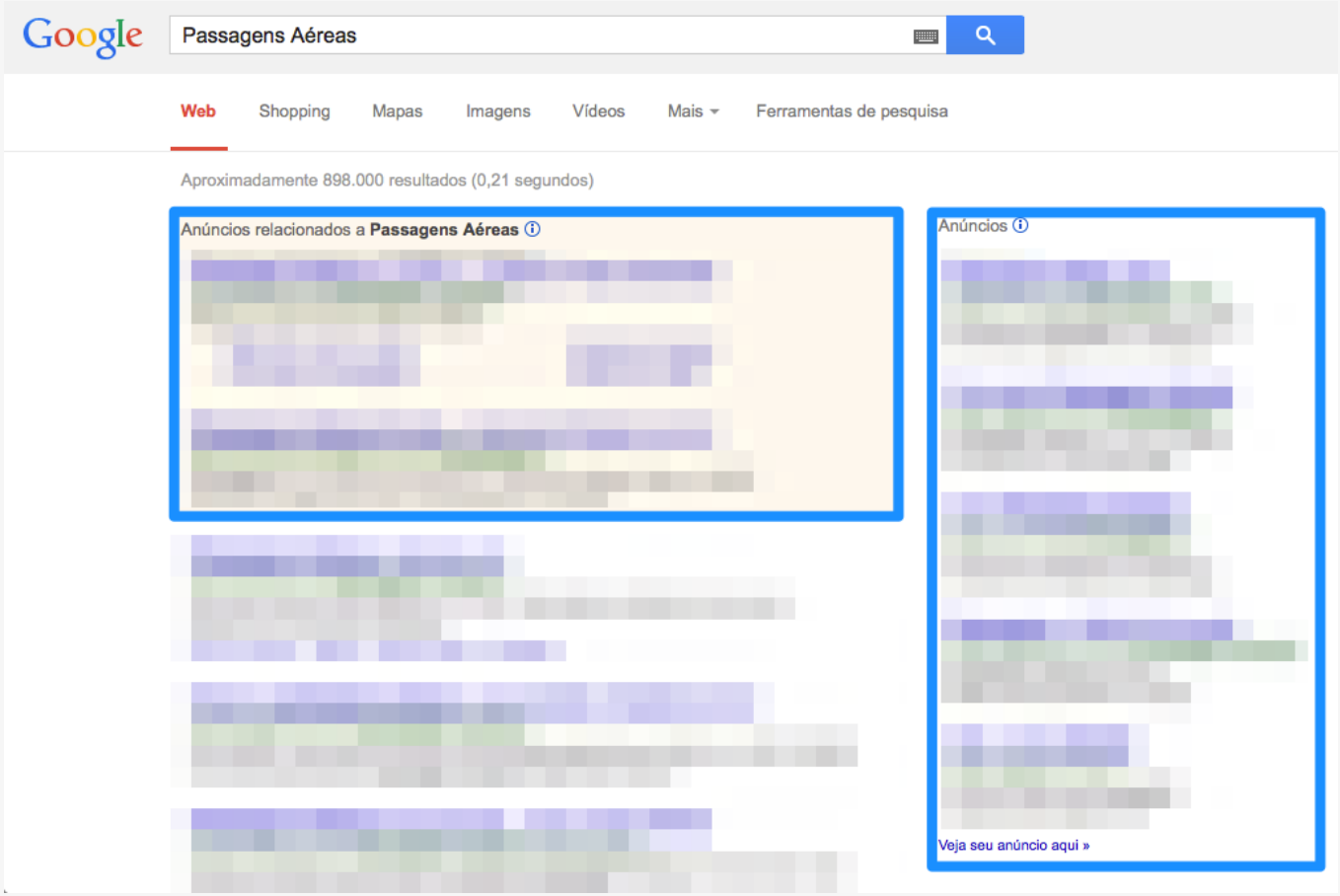
Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado
- Decidir como distribuir n itens a m jogadores

Podem ser repensados utilizando a Teoria da Computação

Exemplo: Leilões de anúncios

Exemplo: Leilões de anúncios



Objetivo

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados a Teoria dos Jogos

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados a Teoria dos Jogos
- Abordar a Teoria dos Jogos do ponto de vista da Teoria da Computação

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados a Teoria dos Jogos
- Abordar a Teoria dos Jogos do ponto de vista da Teoria da Computação
- Apresentar problemas e resultados da área de Teoria dos Jogos Algorítmica

Jogos e conceitos básicos de soluções

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Duração da pena:

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Duração da pena:

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 / 4	5 / 1
Silenciar	1 / 5	2 / 2

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 4	5 1
Silenciar	1 5	2 2

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 4	5 1
Silenciar	1 5	2 2

Análise feita pelo jogador A:

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 4	5 1
Silenciar	1 5	2 2

Análise feita pelo jogador A:

- Se B Confessar, é melhor Confessar e ficar 4 anos preso do que Silenciar e ficar 5 anos preso

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 4	5 1
Silenciar	1 5	2 2

Análise feita pelo jogador A:

- Se B Confessar, é melhor Confessar e ficar 4 anos preso do que Silenciar e ficar 5 anos preso
- Se B Silenciar, é melhor Confessar e ficar 1 ano preso do que Silenciar e ficar 2 anos preso

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 4	5 1
Silenciar	1 5	2 2

Análise feita pelo jogador A:

- Se B Confessar, é melhor Confessar e ficar 4 anos preso do que Silenciar e ficar 5 anos preso
- Se B Silenciar, é melhor Confessar e ficar 1 ano preso do que Silenciar e ficar 2 anos preso

Por simetria, para ambos os jogadores, é melhor Confessar independente da estratégia do outro jogador

Jogo da Poluição

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$
- A única situação estável é quando todos poluem

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$
- A única situação estável é quando todos poluem

O custo de um país poderia ser 3, ao invés de n, se os países não fossem egoístas!

Jogo do Congestionamento

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B

Jogo do Congestionamento

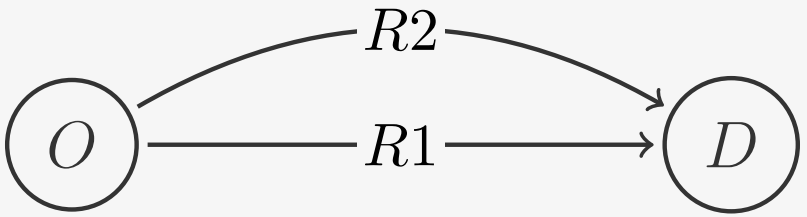
- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D
- Rota $R1$ é a mais rápida

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D
- Rota $R1$ é a mais rápida



Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Análise feita pelo jogador A:

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Análise feita pelo jogador A:

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Análise feita pelo jogador A:

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Análise feita pelo jogador A:

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

A melhor rota para A depende da escolha de B

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Análise feita pelo jogador A:

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

A melhor rota para A depende da escolha de B

Se ambos escolherem rotas diferentes, eles não se arrependem

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- Pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- Pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- Pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Quem perde ou empata, se arrepende da sua escolha

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de resultados

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de resultados
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em $\mathbb{R}$

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de resultados
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em $\mathbb{R}$
- $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ é a utilidade (ganho) do jogador i quando o resultado é $(s_1, \ldots, s_n)$

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de resultados
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em $\mathbb{R}$
- $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ é a utilidade (ganho) do jogador i quando o resultado é $(s_1, \ldots, s_n)$
- Alternativamente, podemos considerar uma função de custo c_i de S em $\mathbb{R}$

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um resultado é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de resultados
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em $\mathbb{R}$
- $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ é a utilidade (ganho) do jogador i quando o resultado é $(s_1, \ldots, s_n)$
- Alternativamente, podemos considerar uma função de custo c_i de S em $\mathbb{R}$
  - Podemos converter usando $c_i(s) = -u_i(s)$

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são racionais

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são racionais

- Isto é, eles buscam maximizar sua utilidade

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são racionais

- Isto é, eles buscam maximizar sua utilidade
- Ou minimizar o seu custo

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são racionais

- Isto é, eles buscam maximizar sua utilidade
- Ou minimizar o seu custo

Vários dos principais conceitos que veremos se baseiam na racionalidade dos jogadores

Formalização do Dilema do Prisioneiro

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ & \\ & \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ & \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ & \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$N = \{A, B\}$
$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$
$S = S_A \times S_B$

$$u_A(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$u_B(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Notação

Considere um jogo dado por

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Para um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S:

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Para um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S:

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Para um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S:

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Para um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S:

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$

Essa notação é útil para comparar duas estratégias quando os outros jogadores mantém suas escolhas

Respostas e Estratégias Dominantes

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma melhor resposta do que $s_i' \in S_i$ para $s_{-i} \in S_{-i}$ se

Respostas e Estratégias Dominantes

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma melhor resposta do que $s_i' \in S_i$ para $s_{-i} \in S_{-i}$ se

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Respostas e Estratégias Dominantes

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma melhor resposta do que $s_i' \in S_i$ para $s_{-i} \in S_{-i}$ se

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s_i' \in S_i$, temos que

Respostas e Estratégias Dominantes

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma melhor resposta do que $s_i' \in S_i$ para $s_{-i} \in S_{-i}$ se

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s_i' \in S_i$, temos que

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Respostas e Estratégias Dominantes

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma melhor resposta do que $s_i' \in S_i$ para $s_{-i} \in S_{-i}$ se

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s_i' \in S_i$, temos que

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma estratégia dominante se, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, temos que s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Papel é uma melhor resposta do que pedra quando o outro jogador joga papel

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Papel é uma melhor resposta do que pedra quando o outro jogador joga papel
- Tesoura é uma resposta ótima quando o outro jogador joga papel

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Papel é uma melhor resposta do que pedra quando o outro jogador joga papel
- Tesoura é uma resposta ótima quando o outro jogador joga papel
- Note que nesse jogo, nenhum dos jogadores tem uma estratégia dominante

Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	-4 -4	-5 -1
Silenciar	-1 -5	-2 -2

Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	-4 -4	-5 -1
Silenciar	-1 -5	-2 -2

- Confessar é uma melhor resposta do que Silenciar quando o outro jogador joga Silenciar

Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	-4 -4	-5 -1
Silenciar	-1 -5	-2 -2

- Confessar é uma melhor resposta do que Silenciar quando o outro jogador joga Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima quando o outro jogador joga Silenciar

Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	-4 -4	-5 -1
Silenciar	-1 -5	-2 -2

- Confessar é uma melhor resposta do que Silenciar quando o outro jogador joga Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima quando o outro jogador joga Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima quando o outro jogador joga Confessar

Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	-4 -4	-5 -1
Silenciar	-1 -5	-2 -2

- Confessar é uma melhor resposta do que Silenciar quando o outro jogador joga Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima quando o outro jogador joga Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima quando o outro jogador joga Confessar
- Confessar é uma estratégia dominante para ambos os jogadores

Leilão de um item de carta fechada

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0
- O vencedor paga um preço p que depende apenas dos lances dos compradores

Modelando o leilão

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
- Um jogador k submete um lance ℓ_k ($\ell_k \in \mathbb{R}_+$)

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
- Um jogador k submete um lance ℓ_k ($\ell_k \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
- Um jogador k submete um lance ℓ_k ($\ell_k \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:
  - $v_k - p(\ell)$, se o jogador ganha o item

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
- Um jogador k submete um lance ℓ_k ($\ell_k \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:
  - $v_k - p(\ell)$, se o jogador ganha o item
  - 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- Isto é, se ele der um lance menor do que o seu real valor para o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- Isto é, se ele der um lance menor do que o seu real valor para o item
- Não vale a pena relatar o real valor para o item

Leilão de segundo preço (Vickrey)

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se max$\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Note que, se todo jogador relatar v_k, então o item é entregue para o comprador com maior v_k, maximizando o bem-estar social

Design de Mecanismos

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

No caso do Dilema do Prisioneiro:

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

No caso do Dilema do Prisioneiro:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

No caso do Dilema do Prisioneiro:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do Leilão de Segundo Preço:

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

No caso do Dilema do Prisioneiro:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do Leilão de Segundo Preço:

- o preço é escolhido para incentivar os jogadores a relatarem os seus valores reais e consequentemente maximizar o bem-estar social

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características ``interessantes''

No caso do Dilema do Prisioneiro:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do Leilão de Segundo Preço:

- o preço é escolhido para incentivar os jogadores a relatarem os seus valores reais e consequentemente maximizar o bem-estar social

Veremos mais sobre Design de Mecanismos durante o curso

Equilíbrio

Relembrando:

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ é um equilíbrio (de Nash) se, para todo jogador i, s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Um resultado $s = (s_1, \ldots, s_n)$ é um equilíbrio (de Nash) se, para todo jogador i, s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Isto é, nenhum jogador pode melhorar sua utilidade através de uma mudança individual de estratégia

Jogo do Congestionamento

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Jogo do Congestionamento

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5 / 5	2 / 1
$R2$	1 / 2	6 / 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash

Jogo do Congestionamento

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5 / 5	2 / 1
$R2$	1 / 2	6 / 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash

Jogo do Congestionamento

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash
- Ou seja, um jogo pode ter mais de um equilíbrio

Jogo do Congestionamento

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash
- Ou seja, um jogo pode ter mais de um equilíbrio

Qual equilíbrio irá ocorrer?

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura
- Isto é, um jogo pode não ter equilíbrios

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura
- Isto é, um jogo pode não ter equilíbrios

Como você joga Pedra-Papel-Tesoura na vida real?

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória
- Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória
- Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i

Estratégias puras:

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória
- Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i

Estratégias puras:

- $s_i \in S_i$ é chamada de estratégia pura

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória
- Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i

Estratégias puras:

- $s_i \in S_i$ é chamada de estratégia pura
- Uma estratégia pura s_i pode ser vista como uma estratégias mistas onde a probabilidade de s_i ser escolhida é igual a 1

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s)\mathbb{P}_\sigma(s),$$

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s)\mathbb{P}_\sigma(s),$$

onde $\mathbb{P}_\sigma(s) = \prod_j \sigma_j(s_j)$

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s)\mathbb{P}_\sigma(s),$$

onde $\mathbb{P}_\sigma(s) = \prod_j \sigma_j(s_j)$

Dizemos que os jogadores são neutros ao risco

Respostas e Estratégias Mista Dominantes

Respostas e Estratégias Mista Dominantes

Uma estratégia mista σ_i é uma melhor resposta do que σ_i' para σ_{-i} se

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] > \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Respostas e Estratégias Mista Dominantes

Uma estratégia mista σ_i é uma melhor resposta do que σ_i' para σ_{-i} se

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] > \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Uma estratégia mista σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} se, para todo σ_i', temos que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Respostas e Estratégias Mista Dominantes

Uma estratégia mista σ_i é uma melhor resposta do que σ_i' para σ_{-i} se

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] > \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Uma estratégia mista σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} se, para todo σ_i', temos que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Uma estratégia mista σ_i é dominante se, para todo σ_{-i}, temos que σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Equilíbrio Misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um equilíbrio misto (de Nash) se, para todo jogador i, σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um equilíbrio misto (de Nash) se, para todo jogador i, σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Exemplo: $\rho_1 = \rho_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ é um equilíbrio misto de Nash para o Pedra-Papel-Tesoura.

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um equilíbrio misto (de Nash) se, para todo jogador i, σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Exemplo: $\rho_1 = \rho_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ é um equilíbrio misto de Nash para o Pedra-Papel-Tesoura.

Vamos mostrar que esse é de fato um equilíbrio e que ele é único!

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$u_1(\sigma, \varphi)$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$u_1(\sigma, \varphi) = 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, \varphi) &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, \varphi) = & \ 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ & + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ & - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, \varphi) &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, \varphi) &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

E por simetria,

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned} u_1(\sigma, \varphi) &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

E por simetria,

$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $u_1(\sigma, \varphi) = 0$ para qualquer estratégia mista σ

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $u_1(\sigma, \varphi) = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $u_1(\sigma, \varphi) = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $u_1(\sigma, \varphi) = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Por simetria, se $\sigma = \varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas e temos um equilíbrio.

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $u_1(\sigma, \varphi) = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Por simetria, se $\sigma = \varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas e temos um equilíbrio.

Mas será que ele é único?

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
  - não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
  - não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
  - não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

- Se $\sigma_3 = 0$, então $\sigma_2 = 1$ (contradição)

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

- Se $\sigma_3 = 0$, então $\sigma_2 = 1$ (contradição)
- Se $\sigma_3 > 0$, então $\varphi_2 = 0$ e $\varphi_1 = 1$ (contradição)

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

- Se $\sigma_3 = 0$, então $\sigma_2 = 1$ (contradição)
- Se $\sigma_3 > 0$, então $\varphi_2 = 0$ e $\varphi_1 = 1$ (contradição)

Se $\sigma_3 = 0$:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

- Se $\sigma_3 = 0$, então $\sigma_2 = 1$ (contradição)
- Se $\sigma_3 > 0$, então $\varphi_2 = 0$ e $\varphi_1 = 1$ (contradição)

Se $\sigma_3 = 0$:

- Se $\sigma_2 = 0$, então $\sigma_1 = 1$ (contradição)

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$u_1(\sigma, \varphi) = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$u_2(\sigma, \varphi) = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Assim, ou $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_3 = 0$

Se $\sigma_1 = 0$:

- Se $\sigma_3 = 0$, então $\sigma_2 = 1$ (contradição)
- Se $\sigma_3 > 0$, então $\varphi_2 = 0$ e $\varphi_1 = 1$ (contradição)

Se $\sigma_3 = 0$:

- Se $\sigma_2 = 0$, então $\sigma_1 = 1$ (contradição)
- Se $\sigma_2 > 0$, então $\varphi_1 = 0$ (contradição)

Equilíbrio Misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

- com número infinito de jogadores ou

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

- com número infinito de jogadores ou
- com conjuntos de estratégias infinitos

Jogo do Semáforo

Jogo do Semáforo

A \ B	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Jogo do Semáforo

A \ B	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

Jogo do Semáforo

A \ B	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

- (Cruzar, Parar)

Jogo do Semáforo

A \ B	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

- (Cruzar, Parar)
- (Parar, Cruzar)

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$-100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b)$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} &-100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ &\qquad = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) \end{aligned}$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1-101p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1-101p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1-101p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) = 0$: qualquer $p_a \in [0,1]$ é resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ = -100\,p_a p_b + 1\,p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1-101p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) = 0$: qualquer $p_a \in [0,1]$ é resposta ótima

Por simetria, $p_a = p_b = 1/101$ é um equilíbrio misto!