

MO758/MC758

Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2018

Introdução

O que é a Teoria dos Jogos?

Introdução

O que é a Teoria dos Jogos?

- Estudo da interação entre agentes e dos resultados que possam ocorrer a partir dessa interação

Introdução

O que é a **Teoria dos Jogos**?

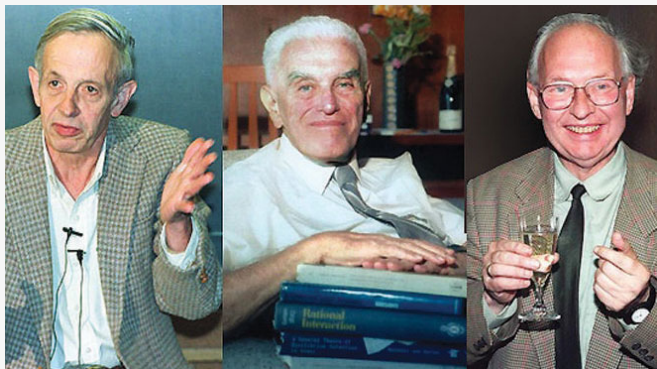
- Estudo da interação entre agentes e dos resultados que possam ocorrer a partir dessa interação

Theory of Games and Economic Behavior,
von Neumann e Morgenstern (1944)



Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 1994

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 1994



Nash, Harsanyi e Selten: *“for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2005

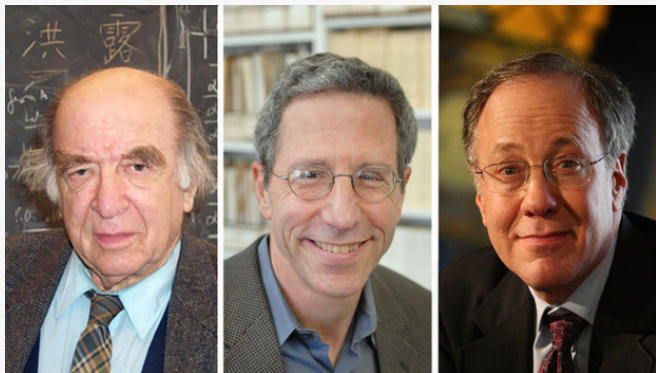
Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2005



Aumann e Schelling: *“for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis.”*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2007

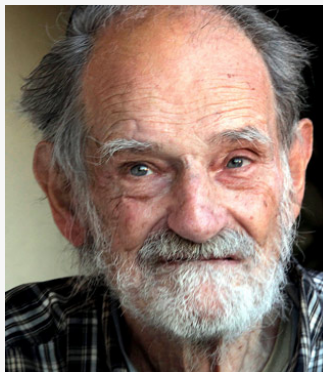
Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2007



Hurwicz, Maskin e Myerson: *“for having laid the foundations of mechanism design theory.”*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2012

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2012



Roth e Shapley: *“for the theory of stable allocations and the practice of market design.”*

Teoria dos Jogos para Computólogos

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Nisan e Ronen, Algorithmic Mechanism Design, STOC'99:

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Nisan e Ronen, Algorithmic Mechanism Design, STOC'99: “We consider *algorithmic* problems ... where the participants cannot be assumed to follow the algorithm but rather their own *self-interest*. ... the algorithm designer should *ensure* in advance that the agents' interests are best served by *behaving correctly*.”

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Localização de Instalações

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Localização de Instalações
- Empacotamento

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Localização de Instalações
- Empacotamento

Podem ser repensados utilizando a **Teoria dos Jogos**

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado
- Decidir como distribuir n itens a m jogadores

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

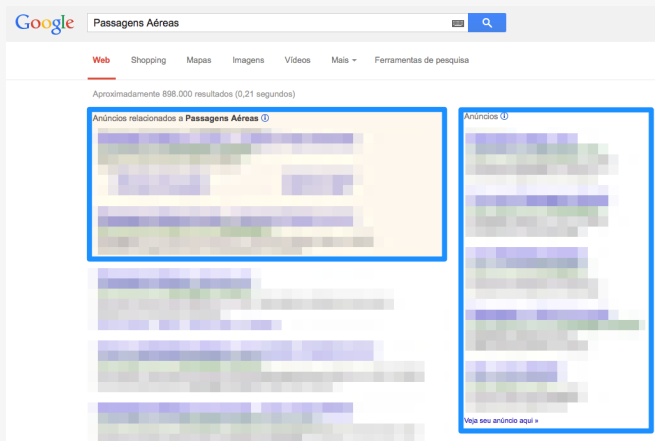
Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado
- Decidir como distribuir n itens a m jogadores

Podem ser repensados utilizando a **Teoria da Computação**

Exemplo: Leilões de anúncios

Exemplo: Leilões de anúncios



Objetivo

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados à Teoria dos Jogos

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados à Teoria dos Jogos
- Abordar a Teoria dos Jogos do ponto de vista da Teoria da Computação

Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados à Teoria dos Jogos
- Abordar a Teoria dos Jogos do ponto de vista da Teoria da Computação
- Apresentar problemas e resultados da área de Teoria dos Jogos Algorítmica

Jogos e conceitos básicos de soluções

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros *A* e *B* interrogados separadamente

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Duração da pena:

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: **confessar** ou **silenciar**
- Duração da pena depende das respostas

Duração da pena:

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise do Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise do Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise feita pelo jogador A :

Análise do Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise feita pelo jogador A :

- Se B **Confessar**, é melhor **Confessar** e ficar 4 anos preso do que **Silenciar** e ficar 5 anos preso

Análise do Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise feita pelo jogador A :

- Se B **Confessar**, é melhor **Confessar** e ficar 4 anos preso do que **Silenciar** e ficar 5 anos preso
- Se B **Silenciar**, é melhor **Confessar** e ficar 1 ano preso do que **Silenciar** e ficar 2 anos preso

Análise do Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	4, 4	1, 5
Silenciar	5, 1	2, 2

Análise feita pelo jogador A :

- Se B **Confessar**, é melhor **Confessar** e ficar 4 anos preso do que **Silenciar** e ficar 5 anos preso
- Se B **Silenciar**, é melhor **Confessar** e ficar 1 ano preso do que **Silenciar** e ficar 2 anos preso

Por simetria, para ambos os jogadores, é melhor **Confessar** independente da estratégia do outro jogador

Jogo da Poluição

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$
- A única situação **estável** é quando todos poluem

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$
- A única situação **estável** é quando todos poluem

O custo de um país poderia ser **3**, ao invés de n , se os países não fossem egoístas!

Jogo do Congestionamento

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B

Jogo do Congestionamento

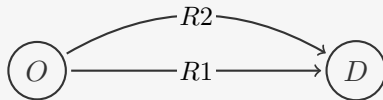
- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D
- Rota $R1$ é a mais rápida

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D
- Rota $R1$ é a mais rápida



Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Análise feita pelo jogador A :

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Análise feita pelo jogador A :

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Análise feita pelo jogador A :

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Análise feita pelo jogador A :

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

A melhor rota para A depende da escolha de B

Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Análise feita pelo jogador A :

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

A melhor rota para A depende da escolha de B

Se ambos escolherem rotas diferentes, eles não se arrependem

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores **A** e **B**

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- Pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores **A** e **B**
- Três possíveis escolhas: **pedra**, **papel**, ou **tesoura**
- **Pedra** quebra **tesoura** que corta **papel** que embrulha **pedra**

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores **A** e **B**
- Três possíveis escolhas: **pedra**, **papel**, ou **tesoura**
- **Pedra** quebra **tesoura** que corta **papel** que embrulha **pedra**

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Quem perde ou empata, se arrepende da sua escolha

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**
- $S = S_1 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de perfis

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**
- $S = S_1 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de perfis
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em \mathbb{R}

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**
- $S = S_1 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de perfis
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em \mathbb{R}
- $u_i(s_1, \dots, s_n)$ é a **utilidade** (ganho) do jogador i quando o perfil é (s_1, \dots, s_n)

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**
- $S = S_1 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de perfis
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em \mathbb{R}
- $u_i(s_1, \dots, s_n)$ é a **utilidade** (ganho) do jogador i quando o perfil é (s_1, \dots, s_n)
- Alternativamente, podemos considerar uma função de custo c_i de S em \mathbb{R}

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de **estratégias**
- Um **perfil** (de estratégias) é um vetor (s_1, \dots, s_n) onde $s_i \in S_i$
 - ▶ também chamamos de **resultados do jogo**
- $S = S_1 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de perfis
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em \mathbb{R}
- $u_i(s_1, \dots, s_n)$ é a **utilidade** (ganho) do jogador i quando o perfil é (s_1, \dots, s_n)
- Alternativamente, podemos considerar uma função de custo c_i de S em \mathbb{R}
 - ▶ Podemos converter usando $c_i(s) = -u_i(s)$

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são **racionais**

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são **racionais**

- Isto é, eles buscam **maximizar sua utilidade**

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são **racionais**

- Isto é, eles buscam **maximizar sua utilidade**
- Ou **minimizar o seu custo**

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são **racionais**

- Isto é, eles buscam **maximizar sua utilidade**
- Ou **minimizar o seu custo**

Vários dos principais conceitos que veremos se baseiam na **racionalidade** dos jogadores

Formalização do Dilema do Prisioneiro

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \left\{ \right.$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \left\{ \right.$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$

$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$

$$S = S_A \times S_B$$

$$u_A(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$u_B(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Notação

Considere um jogo dado por

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$

S_{-i} é o conjunto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$

S_{-i} é o conjunto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$

- Isto é, o conjunto de todos os s_{-i}

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i :
 - ▶ Conjunto S_i de **estratégias** do jogador i
 - ▶ Função de utilidade u_i de S em \mathbb{R}

Para um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ em S :

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$

S_{-i} é o conjunto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$

- Isto é, o conjunto de todos os s_{-i}

Essa notação é útil para comparar duas estratégias quando os outros jogadores mantêm suas escolhas

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **estratégia dominante** se, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, temos que s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

- **Tesoura** é uma **resposta ótima** para **papel**

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

- **Tesoura** é uma **resposta ótima** para **papel**
- Nenhum dos jogadores tem uma **estratégia dominante**

Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	$-4, -4$	$-1, -5$
Silenciar	$-5, -1$	$-2, -2$

Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	$-4, -4$	$-1, -5$
Silenciar	$-5, -1$	$-2, -2$

- **Confessar** é uma **resposta ótima** para **Silenciar**

Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	$-4, -4$	$-1, -5$
Silenciar	$-5, -1$	$-2, -2$

- Confessar é uma resposta ótima para Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima para Confessar

Dilema do Prisioneiro

$A \backslash B$	Confessar	Silenciar
Confessar	$-4, -4$	$-1, -5$
Silenciar	$-5, -1$	$-2, -2$

- **Confessar** é uma **resposta ótima** para **Silenciar**
- **Confessar** é uma **resposta ótima** para **Confessar**
- **Confessar** é uma **estratégia dominante** para ambos os jogadores

Leilão de um item de carta fechada

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0
- O vencedor paga um preço p que depende apenas dos lances dos compradores

Modelando o leilão

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
 - ▶ Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
 - ▶ Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item
- Um jogador k submete um lance $\ell_k \in \mathbb{R}_+$

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
 - ▶ Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item
- Um jogador k submete um lance $\ell_k \in \mathbb{R}_+$
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
 - ▶ Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item
- Um jogador k submete um lance $\ell_k \in \mathbb{R}_+$
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:
 - ▶ $v_k - p(\ell)$, se o jogador ganha o item

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
 - ▶ Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item
- Um jogador k submete um lance $\ell_k \in \mathbb{R}_+$
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:
 - ▶ $v_k - p(\ell)$, se o jogador ganha o item
 - ▶ 0 , se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- i.e., se der um lance menor do que o seu real valor

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- i.e., se der um lance menor do que o seu real valor
- Não vale a pena relatar o real valor para o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- i.e., se der um lance menor do que o seu real valor
- Não vale a pena relatar o real valor para o item
 - ▶ É melhor “mentir”...

Leilão de segundo preço (Vickrey)

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Se todo jogador relatar v_k

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Se todo jogador relatar v_k

- então o item é entregue para o comprador com maior v_k

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k :

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
 - ▶ $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
 - ▶ $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Se todo jogador relatar v_k

- então o item é entregue para o comprador com maior v_k
- maximizando o bem-estar social

Design de Mecanismos

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do **Dilema do Prisioneiro**:

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do **Dilema do Prisioneiro**:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do **Dilema do Prisioneiro**:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do **Leilão de Segundo Preço**:

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do **Dilema do Prisioneiro**:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do **Leilão de Segundo Preço**:

- o preço é escolhido para incentivar os jogadores a relatarem os seus valores reais e consequentemente maximizar o bem-estar social

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do **Dilema do Prisioneiro**:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do **Leilão de Segundo Preço**:

- o preço é escolhido para incentivar os jogadores a relatarem os seus valores reais e consequentemente maximizar o bem-estar social

Veremos mais sobre **Design de Mecanismos** durante o curso

Equilíbrio

Relembrando:

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ é um **equilíbrio (de Nash)** se, para todo jogador i , s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **resposta ótima** para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Um perfil $s = (s_1, \dots, s_n)$ é um **equilíbrio (de Nash)** se, para todo jogador i , s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Isto é, nenhum jogador pode melhorar sua utilidade através de uma mudança individual de estratégia

Jogo do Congestionamento

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Jogo do Congestionamento

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash

Jogo do Congestionamento

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash

Jogo do Congestionamento

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash
- Ou seja, um jogo pode ter mais de um equilíbrio

Jogo do Congestionamento

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash
- Ou seja, um jogo pode ter mais de um equilíbrio

Qual equilíbrio irá ocorrer?

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	1, -1	-1, 1
papel	-1, 1	0, 0	1, -1
tesoura	1, -1	-1, 1	0, 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	1, -1	-1, 1
papel	-1, 1	0, 0	1, -1
tesoura	1, -1	-1, 1	0, 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura
- Isto é, um jogo pode não ter equilíbrios

Pedra-Papel-Tesoura

$A \backslash B$	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura
- Isto é, um jogo pode não ter equilíbrios

Como você joga Pedra-Papel-Tesoura na vida real?

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma **aleatória**

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma **aleatória**
- Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades** no conjunto S_i

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma **aleatória**
- Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades** no conjunto S_i

Estratégias puras:

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma **aleatória**
- Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades** no conjunto S_i

Estratégias puras:

- $s_i \in S_i$ é chamada de **estratégia pura**

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma **única** estratégia

Podemos considerar também estratégias **mistas**:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma **aleatória**
- Uma **estratégia mista** para o jogador i é uma **distribuição de probabilidades** no conjunto S_i

Estratégias puras:

- $s_i \in S_i$ é chamada de **estratégia pura**
- Uma estratégia pura s_i pode ser vista como uma estratégias mistas onde a probabilidade de s_i ser escolhida é igual a **1**

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \mathbb{P}_\sigma(s),$$

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \mathbb{P}_\sigma(s),$$

onde $\mathbb{P}_\sigma(s) = \prod_j \sigma_j(s_j)$

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i , σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Qual é a **utilidade esperada** do jogador i para σ ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \mathbb{P}_\sigma(s),$$

onde $\mathbb{P}_\sigma(s) = \prod_j \sigma_j(s_j)$

Dizemos que os jogadores são **neutros ao risco**

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia mista σ_i é uma **resposta ótima** para σ_{-i} se, para todo σ'_i , temos que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})]$$

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia mista σ_i é uma **resposta ótima** para σ_{-i} se, para todo σ'_i , temos que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})]$$

Uma estratégia mista σ_i é **dominante** se, para todo σ_{-i} , temos que σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Equilíbrio Misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um **equilíbrio misto (de Nash)** se, para todo jogador i , σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um **equilíbrio misto (de Nash)** se, para todo jogador i , σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Exemplo: $\rho_1 = \rho_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ é um equilíbrio misto de Nash para o Pedra-Papel-Tesoura.

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um **equilíbrio misto (de Nash)** se, para todo jogador i , σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Exemplo: $\rho_1 = \rho_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ é um equilíbrio misto de Nash para o Pedra-Papel-Tesoura.

Vamos mostrar que esse é de fato um equilíbrio e que ele é único!

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)]$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2)\end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1)\end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

E por simetria,

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &\quad + 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &\quad - 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

E por simetria,

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Por simetria, se $\sigma = \varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas e temos um equilíbrio.

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Por simetria, se $\sigma = \varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas e temos um equilíbrio.

Mas será que ele é único?

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégias puras
 - não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégias puras
 - ▶ não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
 - ▶ não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$
- Mas então, $\sigma_2 = 1$ é a única resposta ótima

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma, \varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma, \varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
 - ▶ não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$
- Mas então, $\sigma_2 = 1$ é a única resposta ótima
 - ▶ $\varphi_3 - \varphi_2 \leq 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leq 0$, mas $\varphi_1 - \varphi_3 > 0$

Equilíbrio Misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

- com número **infinito** de jogadores ou

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

- com número **infinito** de jogadores ou
- com conjuntos de estratégias **infinitos**

Jogo do Semáforo

Jogo do Semáforo

$A \backslash B$	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Jogo do Semáforo

$A \backslash B$	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

Jogo do Semáforo

$A \backslash B$	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

- (Cruzar, Parar)

Jogo do Semáforo

$A \backslash B$	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 -100	0 1
Parar	1 0	0 0

Dois equilíbrios puros:

- (Cruzar, Parar)
- (Parar, Cruzar)

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$- 100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b)$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) \end{aligned}$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1 - 101 p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1 - 101 p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1 - 101 p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1 - 101 p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1 - 101 p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima
- $(1 - 101 p_b) = 0$: qualquer $p_a \in [0, 1]$ é resposta ótima

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A :

$$\begin{aligned} & -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) + 0 (1 - p_a) p_b + 0 (1 - p_a) (1 - p_b) \\ & = -100 p_a p_b + 1 p_a (1 - p_b) = p_a (1 - 101 p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1 - 101 p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1 - 101 p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima
- $(1 - 101 p_b) = 0$: qualquer $p_a \in [0, 1]$ é resposta ótima

Por simetria, $p_a = p_b = 1/101$ é um equilíbrio misto!

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente
- São jogos na forma **normal**

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente
- São jogos na forma **normal**
 - ▶ Uma grande tabela de perfis possíveis do jogo

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente
- São jogos na forma **normal**
 - ▶ Uma grande tabela de perfis possíveis do jogo

Veremos agora jogos na forma extensiva

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente
- São jogos na forma **normal**
 - ▶ Uma grande tabela de perfis possíveis do jogo

Veremos agora jogos na forma extensiva

- Jogadores alternam entre si para jogar

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador
- cada aresta representa a estratégia escolhida

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador
- cada aresta representa a estratégia escolhida
- as folhas representam as utilidades obtidas

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador
- cada aresta representa a estratégia escolhida
- as folhas representam as utilidades obtidas

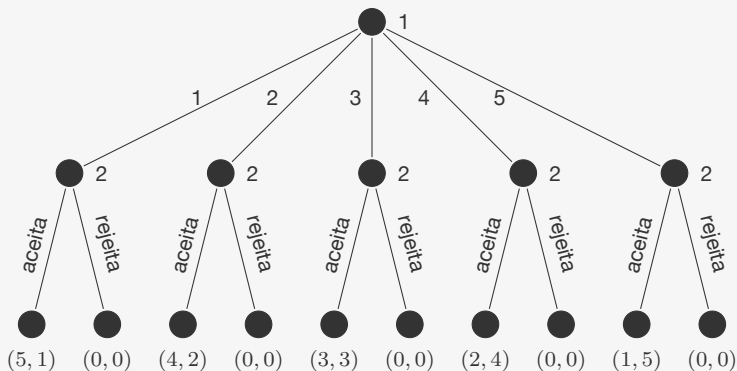
Ex: Jogo do Ultimato (BI\$ 6)

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador
- cada aresta representa a estratégia escolhida
- as folhas representam as utilidades obtidas

Ex: Jogo do Ultimato (B\$ 6)



Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \rightarrow N$ atribui um jogador para cada vértice interno

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \rightarrow N$ atribui um jogador para cada vértice interno
 - ▶ é o jogador que joga se atingirmos esse vértice

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \rightarrow N$ atribui um jogador para cada vértice interno
 - ▶ é o jogador que joga se atingirmos esse vértice
- $\chi : H \rightarrow 2^A$ atribui um conjunto de ações para cada vértice interno

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \rightarrow N$ atribui um jogador para cada vértice interno
 - ▶ é o jogador que joga se atingirmos esse vértice
- $\chi : H \rightarrow 2^A$ atribui um conjunto de ações para cada vértice interno
 - ▶ o conjunto de ações que podem ser tomadas nesse vértice

Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

- Temos um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvore $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $V = H \cup Z$, onde
 - ▶ Z são as folhas de T
 - ▶ H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
 - ▶ Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \rightarrow N$ atribui um jogador para cada vértice interno
 - ▶ é o jogador que joga se atingirmos esse vértice
- $\chi : H \rightarrow 2^A$ atribui um conjunto de ações para cada vértice interno
 - ▶ o conjunto de ações que podem ser tomadas nesse vértice
- $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ atribui uma utilidade para um jogador i para cada folha

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \times_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \times_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$
 - ▶ O produto cartesiano das ações de cada nó do jogador i

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

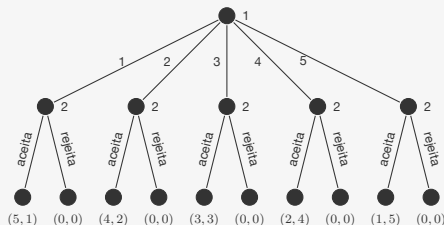
- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \times_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$
 - ▶ O produto cartesiano das ações de cada nó do jogador i
- O jogador define tudo o que ele quer fazer de antemão, dependendo das escolhas dos outros

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \times_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$
 - O produto cartesiano das ações de cada nó do jogador i
- O jogador define tudo o que ele quer fazer de antemão, dependendo das escolhas dos outros

Ex: Jogo do Ultimato (BI\$ 6)

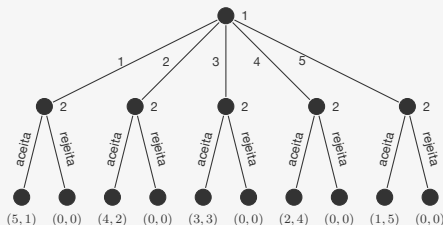


Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \times_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$
 - O produto cartesiano das ações de cada nó do jogador i
- O jogador define tudo o que ele quer fazer de antemão, dependendo das escolhas dos outros

Ex: Jogo do Ultimato (BI\$ 6)



$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$S_2 = \{(\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}), \\ (\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{rejeita}), \\ (\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{rejeita}, \text{aceita}), \dots\}$$

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

Veremos que:

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

Veremos que:

- Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

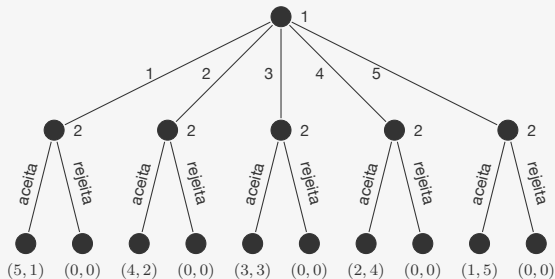
Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

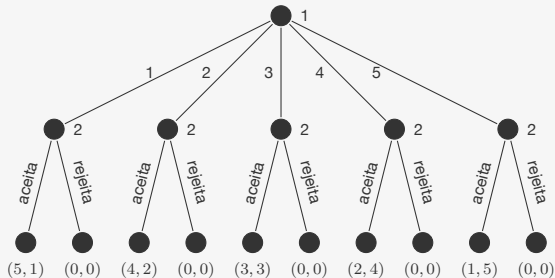
Veremos que:

- Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”
- Que todo j.i.p. tem um equilíbrio puro

Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”

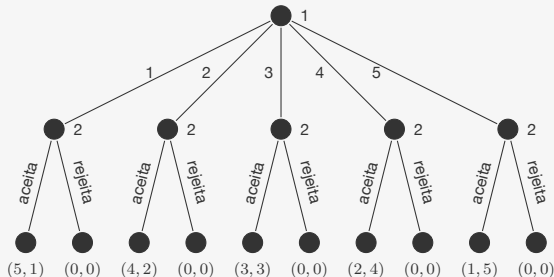


Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”



(5, (rejeita, rejeita, rejeita, rejeita, aceita)) é um equilíbrio:

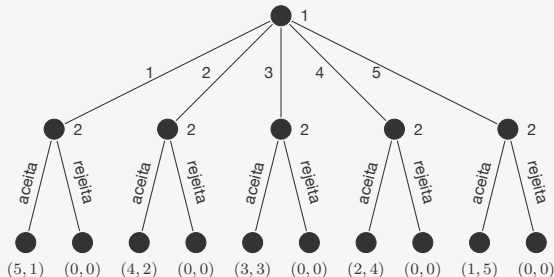
Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”



(5, (rejeita, rejeita, rejeita, rejeita, aceita)) é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0

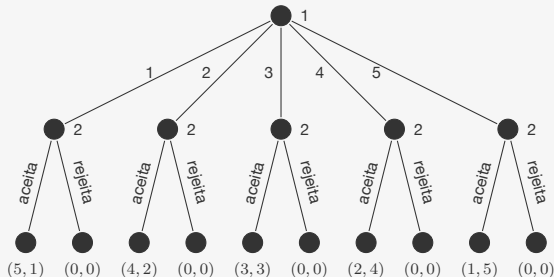
Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”



(5, (rejeita, rejeita, rejeita, rejeita, aceita)) é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0
- A utilidade de 2 é igual ou menor ao mudar de estratégia

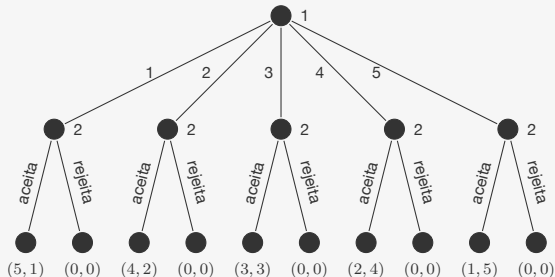
Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”



$(5, (\text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{aceita}))$ é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0
- A utilidade de 2 é igual ou menor ao mudar de estratégia
- O jogador 2 **ameaça** o jogador 1

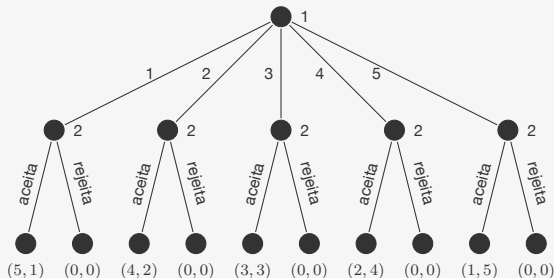
Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”



(5, (rejeita, rejeita, rejeita, rejeita, aceita)) é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0
- A utilidade de 2 é igual ou menor ao mudar de estratégia
- O jogador 2 **ameaça** o jogador 1
- Mas a ameaça não é crível...

Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”

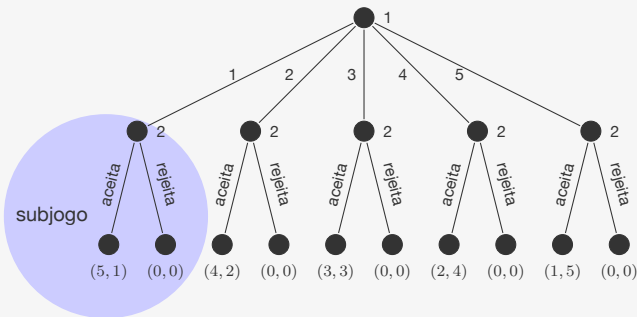


(5, (rejeita, rejeita, rejeita, rejeita, aceita)) é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0
- A utilidade de 2 é igual ou menor ao mudar de estratégia
- O jogador 2 **ameaça** o jogador 1
- Mas a ameaça não é crível...
 - Se o jogador 1 escolher 1, não tem porque 2 não aceitar

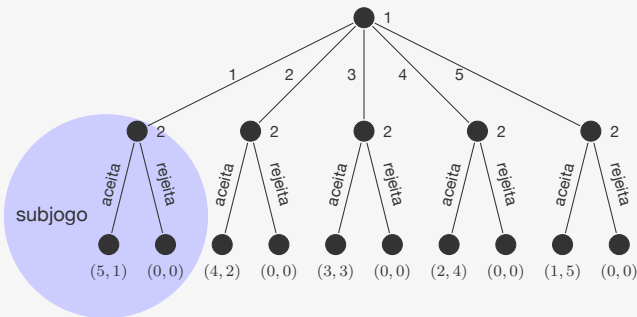
Equilíbrio perfeito de subjogo

Um **subjogo** é um jogo induzido pela restrição da árvore T a um nó h e a seus descendentes



Equilíbrio perfeito de subjogo

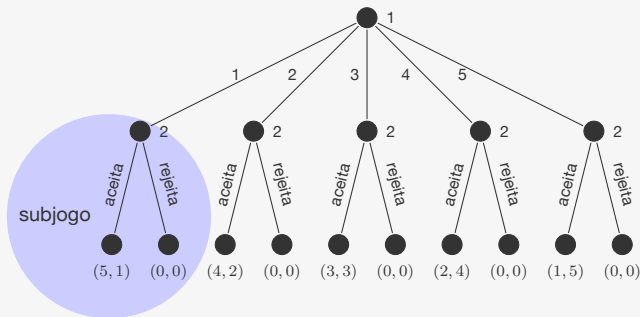
Um **subjogo** é um jogo induzido pela restrição da árvore T a um nó h e a seus descendentes



Um **Equilíbrio Perfeito de Subjogo** é um perfil s tal que a restrição de s a um subjogo G' é um equilíbrio de Nash.

Equilíbrio perfeito de subjogo

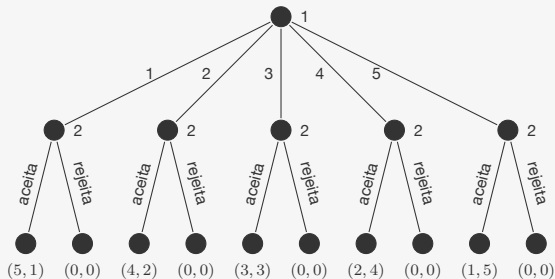
Um **subjogo** é um jogo induzido pela restrição da árvore T a um nó h e a seus descendentes



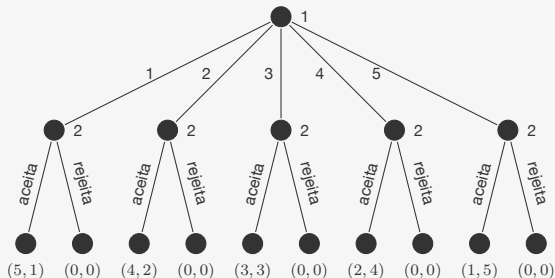
Um **Equilíbrio Perfeito de Subjogo** é um perfil s tal que a restrição de s a um subjogo G' é um equilíbrio de Nash.

Todo equilíbrio perfeito de subjogo é um equilíbrio puro

Equilíbrio perfeito de subjogo

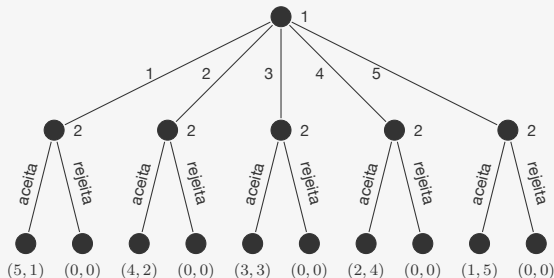


Equilíbrio perfeito de subjogo



$(5, (\text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{aceita}))$ não é um equilíbrio perfeito de subjogo

Equilíbrio perfeito de subjogo



$(5, (\text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{aceita}))$ não é um equilíbrio perfeito de subjogo

- O jogador 2 não escolheu uma estratégia de um equilíbrio para quando o jogador 1 escolhe 3 (por exemplo)

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

No caso do **Jogo do Ultimato**

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

No caso do **Jogo do Ultimato**

- o jogador 1 analisa o que o jogador 2 fará em cada subjogo

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

No caso do **Jogo do Ultimato**

- o jogador 1 analisa o que o jogador 2 fará em cada subjogo
- em cada subjogo, o jogador 2 escolhe **aceitar**

Indução Retrógrada

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
 - ▶ indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
 - ▶ Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
 - ▶ Escolha a melhor subárvore para i
 - ▶ A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

No caso do **Jogo do Ultimato**

- o jogador 1 analisa o que o jogador 2 fará em cada subjogo
- em cada subjogo, o jogador 2 escolhe **aceitar**
- com isso, o jogador 1 escolhe dar apenas **BI\$ 1**

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senioridade: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senioridade: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senioridade: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre
 - uma nova votação é feita

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre
 - uma nova votação é feita
- Os piratas querem

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre
 - uma nova votação é feita
- Os piratas querem
 - ▶ Sobreviver antes de tudo

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A , B , C , D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoria: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre
 - uma nova votação é feita
- Os piratas querem
 - ▶ Sobreviver antes de tudo
 - ▶ Maximizar o número de moedas que recebe

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A, B, C, D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senioridade: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
 - ▶ Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
 - ▶ Em caso de empate, o mais sênior desempata
 - ▶ Se a proposta é aceita
 - as moedas são distribuídas
 - ▶ Se a proposta é rejeitada
 - o proponente é jogado para fora do barco e morre
 - uma nova votação é feita
- Os piratas querem
 - ▶ Sobreviver antes de tudo
 - ▶ Maximizar o número de moedas que recebe
 - ▶ Em caso de empate na utilidade, prefere jogar para fora do barco do que não jogar

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta
- B não pode propor $(99, 0, 0, 1)$, E escolheria matar B

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta
- B não pode propor $(99, 0, 0, 1)$, E escolheria matar B

Assim,

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta
- B não pode propor $(99, 0, 0, 1)$, E escolheria matar B

Assim,

- A propõe $(98, 0, 1, 0, 1)$ e C e E aceitam a proposta

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E :

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C , D e E :

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
 - ▶ Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B , C , D e E :

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta
- B não pode propor $(99, 0, 0, 1)$, E escolheria matar B

Assim,

- A propõe $(98, 0, 1, 0, 1)$ e C e E aceitam a proposta
 - ▶ Se A morrer, eles não ganharão nada

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \dots, I_n)$ onde

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \dots, I_n)$ onde
 - ▶ $I_i = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{k_i}})$ é uma partição de $\{h \in H : \rho(h) = i\}$

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \dots, I_n)$ onde
 - ▶ $I_i = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{k_i}})$ é uma partição de $\{h \in H : \rho(h) = i\}$
 - uma partição dos nós do jogador i

Jogos de Informação Imperfeita

Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \dots, I_n)$ onde
 - ▶ $I_i = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{k_i}})$ é uma partição de $\{h \in H : \rho(h) = i\}$
 - uma partição dos nós do jogador i
 - ▶ com a propriedade que $\chi(h) = \chi(h')$ para todo $h, h' \in I_{i_t}$

Jogos de Informação Imperfeita

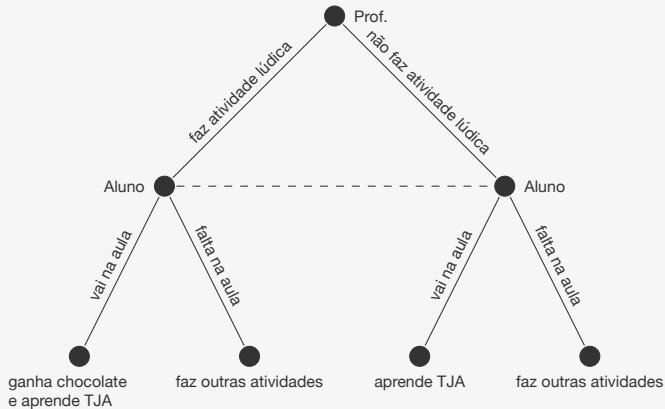
Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

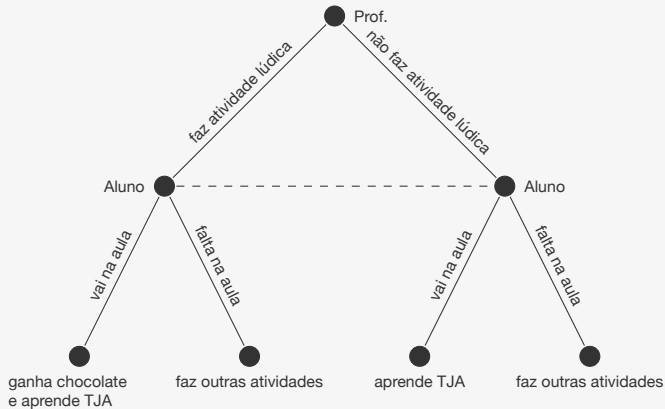
Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \dots, I_n)$ onde
 - ▶ $I_i = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{k_i}})$ é uma partição de $\{h \in H : \rho(h) = i\}$
 - uma partição dos nós do jogador i
 - ▶ com a propriedade que $\chi(h) = \chi(h')$ para todo $h, h' \in I_{i_t}$
 - precisa ser o mesmo conjunto de ações já que o jogador não sabe se está em h ou h'

Exemplo

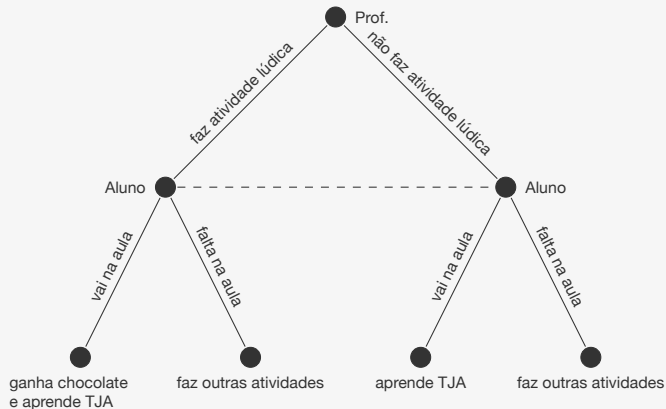


Exemplo



- $I_1 = \{I_{1_1}\}$ e $I_{1_1} = \{r\}$

Exemplo



- $I_1 = \{I_{1_1}\}$ e $I_{1_1} = \{r\}$
- $I_2 = \{I_{2_1}\}$ e $I_{2_1} = \{h_1, h_2\}$