MO758A - Resumo
Selfish Network Creation with Non-uniform Edge Cost

Klairton de Lima Brito - RA188948

13 de junho de 2018

1 Introdução

Este é um resumo do artigo *Selfish Network Creation with Non-uniform Edge Cost* que foi apresentado por Chauhan e coautores [1]. Devido a limitação de espaço algumas provas foram omitidas pelos os autores, mas os mesmos forneceram uma versão [2] com todas elas.
O artigo aborda uma versão do *Network Creation Game (NCG)* [3] em que o custo para estabelecer uma conexão direta com outro agente é não uniforme. Variações dessa versão com restrições adicionais também foram abordadas.
No NCG os agentes são associados a vértices e o objetivo é que todos os agentes de maneira egoísta consigam se conectar aos demais agentes, de forma direta ou não, e que o custo pago por cada agente seja minimizado. Para todos os agentes, o custo de utilização de uma aresta é igual a um e o custo para criação de uma nova aresta, que é pago por um único agente, é dado por um parâmetro α. Os autores comentam que essa é uma boa abordagem e que gera modelos simples, mas tem uma forte influência sobre o equilíbrio obtido e em suas propriedades. Esse argumento é apoiado pelo fato da estrutura das redes que são formadas mudarem de cliques, adotando α com valores baixos, para árvores quando utilizando α com valores mais altos.
A abordagem dos autores chamada de *degree price network creation game (degNCG)* é inspirada principalmente na formação de redes sociais. Uma analogia que pode ser feita é quando se pretende estabelecer uma relação com um indivíduo, sendo mais difícil (custo) se conectar com uma pessoal mais popular, como por exemplo uma celebridade, do que com outra pessoa menos popular. Em contra partida, uma vez que essa relação é estabelecida, um maior contato com as pessoas que estão no círculo social dessa celebridade passa a acontecer (distância reduzida).
Na abordagem dos autores o custo pago para criar uma conexão com outro agente é baseado no grau (popularidade) do agente de destino, ou seja, o valor pago para criação de uma nova aresta não é fixo. Como resultado do trabalho, os autores apresentam uma abordagem que gera um modelo livre de parâmetros. Para retratar a questão da localidade nas redes sociais também foi abordada uma variação com uma restrição adicional onde os agentes só podem se conectar diretamente com outros agentes que estiverem no máximo k de distância. Essa versão foi chamada de *k-local degNCG (degkNCG)* e os autores mostraram resultados importantes para $k = 2$ e $k = 4$. Outra versão onde os agentes só podem adicionar arestas na rede também foi estudada, asssim como sua variação com restrição de localidade, as mesmas foram chamadas de *degree price add-only game (degAOG)* e *k-local degAOG (degkAOG)*, respectivamente.

2 Definições

Dado o grafo $G = (V, E)$, a distância $D_G(u, v)$ entre os vértices u e v é o número de aresta no menor caminho entre u e v. Para um dado vértice u em G, $N_k(u)$ é o conjunto de vértices que estão a no máximo k de distância do vértice u em G. Para um dado vértice u em G, $B_k(u)$ é o conjunto de vértices que estão a exatamente k de distância do vértice u em G. O diâmetro do grafo G é denotado por $D(G)$ e o grau de um vértice u em G é denotado por $deg_G(u)$.
Uma estratégia S_u para o agente u é qualquer subconjunto de V onde cada vértice $v \in S_u$ representa que o agente u pagou pela construção da aresta (u, v). Qualquer vetor de estratégias s que especifique uma estratégia para cada agente induz uma rede $G(s) = (V, \cup_{u \in V} \cup_{v \in S_u} (u, v))$. O custo para um agente u em uma rede $G(s)$ é dado por:

$$C_u(G(s)) = \sum_{v \in V} D_G(u, v) + \sum_{v \in S_u} (deg_G(v) - 1)$$

E o custo social de uma rede $G(s)$ é dado por:

$$C(G(s)) = \sum_{u \in V} C_u(G(s))$$

A rede $G(s)$ é um Puro Equilíbrio de Nash (NE) se nenhum agente pode reduzir estritamente seu custo alterando sua estratégia de forma unilateral. De maneira similar, a mesma definição é utilizada em um k-local Puro Equilíbrio de Nash (kNE).

3 Resultados

Nessa seção serão comentados alguns resultados que foram apresentados no artigo.

3.1 Computar a melhor resposta para *deg(2)NCG* e *deg(2)AOG*

Os autores realizaram uma investigação sobre a dificuldade de computar uma resposta para um agente u específico dado que os demais agentes já definiram suas estratégias. O objetivo é minimizar o custo do agente u computando a melhor resposta possível com base na estrutura da rede formada pelas estratégias dos demais agentes. Os autores mostraram que computar essa melhor resposta é uma tarefa NP-Difícil. Inicialmente, foi provado que o problema *Exact-q Set Cover* pertence à classe de problemas NP-Difícil.
O problema *Exact-q Set Cover* consiste em um conjunto universo $U = \{1, \dots, n\}$ e em seus subconjuntos $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, de tal forma que $|A_j| = q|\forall A_j \in A$ e $q \geq 4$. O objetivo é encontrar o menor subconjunto de A em que a união dos A_j desse subconjunto seja igual ao conjunto universo.
Com a prova de que o problema *Exact-q Set Cover* pertence à classe de problemas NP-Difícil, os autores realizaram uma redução da instância do problema *Exact-q Set Cover* para uma instância do problema *deg(2)NCG*/*deg(2)AOG* da seguinte forma:

- Para uma instância do *Exact-q Set Cover*:
  - $U = \{1, 2, \dots, n\}$.
  - $A = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$.
- Crie uma instância do *deg(2)NCG*/*deg(2)AOG*:
  - $V = U \cup A \cup \{1^1, \dots, 1^{q+1}, \dots, n^1, \dots, n^{q+1}\} \cup \{x, u\}$.
  - $E = \{(i, A_j)|i \in A_j\}$
    $\cup\{(i, i^r)|i \in U, 1 \leq r \leq q+1\}$
    $\cup\{(A_j, x)|A_j \in A\}$
    $\cup\{(x, u)\}$

Na redução, cada elemento e subconjunto do conjunto universo torna-se um agente e são criados $n \times (q+1)$ agentes *dummies* juntamente com os agentes x e u. Com os agentes definifidos agora basta estabelecer as arestas. Para cada elemento i em um subconjunto A_j temos uma aresta (i, A_j). Cada vértice que representa um elemento do conjunto universo será conectato com $(q+1)$ vértices *dummies*. Cada vértice que representa um subconjunto A_j será conectado com o vértice x. Por fim, o vértice x será conectado com o vértice u. Na Figura 1 temos um exemplo dessa redução. Uma aresta direcionada (u, v) representa que o vértice u pagou pela criação dessa aresta, arestas não direcionadas representam que é irrelevante saber quem pagou por sua criação.

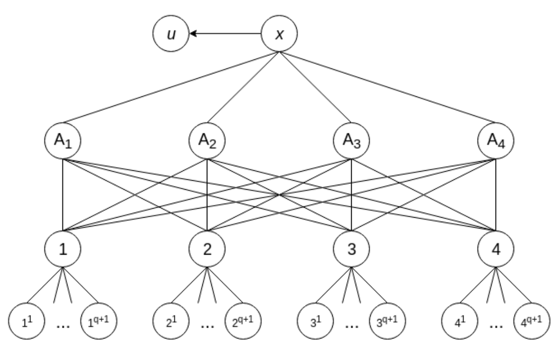

Figura 1: Exemplo da redução da instância do *Exact-q Set Cover* $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{2, 1, 3, 4\}, A_3 = \{3, 1, 2, 4\}, A_4 = \{4, 1, 2, 3\}\}$ para uma instância do $deg(2)$NCG/$deg(2)$AOG.

O ponto agora é determinar a melhor resposta para o agente u. Note que o agente u quer minimizar seu custo e só pode criar arestas para os agentes A_j. Além disso, todo vértice A_j tem grau exatamente $q + 1$ e sabemos que em uma resposta ótima todo vértice que representa $i \in U$ deve estar a exatamente 2 de distância do vértice u. Caso contrário, essa não seria uma resposta ótima pois pagar $q + 1$ por uma aresta para um vértice A_j em que o elemento i está contido e traz uma redução na distância de pelo menos $q + 3$. Como conclusão, os vértices escolhidos para criação de uma aresta paga pelo vértice u representam exatamente os subconjuntos A_j que formam uma resposta ótima para a instância do *Exact-q Set Cover* e implica no seguinte teorema:

Teorema 1. *Computar a melhor resposta para $deg(2)NCG$ e $deg(2)AOG$ é NP-Difícil.*

3.2 Preço da Estabilidade

Para analisar o preço da estabilidade os autores provaram os seguintes teoremas:

Teorema 2. *A estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é um Equilíbrio Puro de Nash (NE) para o $deg(k)NCG$ e $deg(k)AOG$ para qualquer k.*

Pela Figura 2 podemos perceber que o vértice central paga zero para criação de todas as arestas. Além disso, sua distância para qualquer outro vértice é um (menor distância possível) e não pode estar insatisfeito. Para qualquer vértice folha temos que a criação de qualquer aresta irá custar um e a redução na distância será exatamente um. Logo, nenhum vértice folha pode estar insatisfeito.

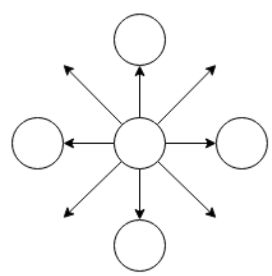

Figura 2: A estrela S_n é uma resposta ótima e uma rede (kNE) para o $deg(k)$NCG e $deg(k)$AOG para qualquer k.

Teorema 3. *A estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é uma solução ótima para o $deg(k)NCG$ e $deg(k)AOG$ para qualquer k.*

Para provar esse teorema, os autores mostram que o custo da estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é exatamente o valor do limitante inferior $2n(n-1)-2m$. Para obter esse limitante inferior os autores analisaram o custo mínimo possível com base no número de arestas que foram criadas, onde m e n representam o número de arestas e agentes da rede, respectivamente. Pelos teoremas anteriores vale o seguinte corolário:

Corolário 1. *O preço da estabilidade para $deg(k)NCG$ e $deg(k)AOG$ é 1.*

3.3 Preço da Anarquia

Para mostrar o preço da anarquia os autores adaptaram um importante lema apresentado por Fabrikant e coautores [3] para a variação $deg(N)$NCG e provaram o seguinte lema:

Lema 1. *Se uma rede G é um (kNE) para o deg(k)NCG, então o custo social é no máximo $O(D)$ vezes que o mínimo custo social possível.*

Com o lema anterior, agora basta apresentar um limitante superior para o tamanho do diâmetro de uma rede em Puro Equilíbrio de Nash para consequentemente obtermos um limitante superior para o preço da anarquia. Para a variação *degNCG* os autores acabaram provando algo mais forte pelo seguinte teorema:

Teorema 4. *Considere variantes do degNCG onde o preço de qualquer aresta (u, v) paga pelo agente u seja uma função linear qualquer do grau de v em G, ou seja, o preço pago para criação da aresta $(u, v) = \beta \times deg_G(v) + \gamma$. Então, o diâmetro de qualquer rede em Puro Equilíbrio de Nash para o degNCG é constante.*

Para provar esse teorema, os autores verificam uma rede (NE) onde o diâmetro é pelo menos 4 e analisam o custo da distância entre os dois vértices em cada extremidade do diâmetro da rede em comparação com o custo da construção de uma aresta entre esses dois vértices. O custo mínimo da distância foi analisada com base no diâmetro da rede. Isolando o diâmetro D na inequação, os autores provaram que ele deve estar limitado superiormente por:

$$D < \beta + 3 + \frac{\gamma + 1}{deg_G(b) + 1} \in O(1)$$

Note que β e γ são constantes e esse limitante superior vale para qualquer variação do *degNCG* onde o preço pago por uma aresta (u, v) é uma função linear do grau do vértice v. Em específico, para a variação abordada pelos autores onde o preço pago pelo agente u por uma aresta (u, v) é $(deg_G(v) - 1)$, os valores $\beta = 1$ e $\gamma = -1$ simulam exatamente esse modelo. Como consequência, o diâmetro de uma rede em Puro Equilíbrio de Nash para o *degNCG* deve ser menor que 4. Os autores mostram que esse limitante superior é justo apresentando uma instância que pode ser vista na Figura 3.

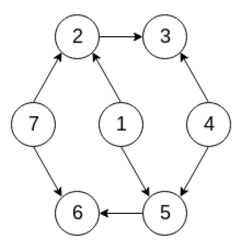

Figura 3: Rede NE para o degNCG onde $D = 3$.

Pelo lema e teorema anterior vale o seguinte corolário:

Corolário 2. *O preço da anaquia para degNCG* $\in O(1)$.

Os autores provaram limitantes superiores para o tamanho do diâmetro em outras variações e obtiveram os seguintes resultados:

- O preço da anarquia para o deg(4)NCG $\in O(1)$.
- O preço da anarquia para o deg(2)NCG $\in O(\sqrt{n})$.
- O preço da anarquia para o deg(k)AOG $\in \theta(n)$ para qualquer k.

3.4 Versão sequêncial $deg(k)$NCG e $deg(k)$AOG

Os autores ainda realizaram uma investigação na versão sequêncial do $deg(k)$NCG e $deg(k)$AOG. Essa versão corresponde a um processo iterativo em que parte de uma solução inicial, vetor de estratégias $\mathbf{s}$, e um agente por vez é escolhido para atualizar sua estratégia buscando reduzir seu custo. Os autores mostraram que a versão sequêncial do $deg(2)$NCG pode não convergir para um equilíbrio. Em contraste com o resultado negativo, os autores mostraram que a versão sequêncial do $deg(2)$AOG garantidamente converge para um equilíbrio em uma quantidade finita de passos.

Referências

[1] Ankit Chauhan, Pascal Lenzner, Anna Melnichenko, and Louise Molitor. Selfish network creation with non-uniform edge cost. In *Algorithmic Game Theory*, pages 160–172, Cham, 2017. Springer International Publishing.

[2] Ankit Chauhan, Pascal Lenzner, Anna Melnichenko, and Louise Molitor. Selfish network creation with non-uniform edge cost. *CoRR*, abs/1706.10200, 2017.

[3] Alex Fabrikant, Ankur Luthra, Elitza Maneva, Christos H. Papadimitriou, and Scott Shenker. On a network creation game. In *Proceedings of the Twenty-second Annual Symposium on Principles of Distributed Computing*, PODC '03, pages 347–351, New York, NY, USA, 2003. ACM.