MC-202 — Unidade 14
Árvores Binárias

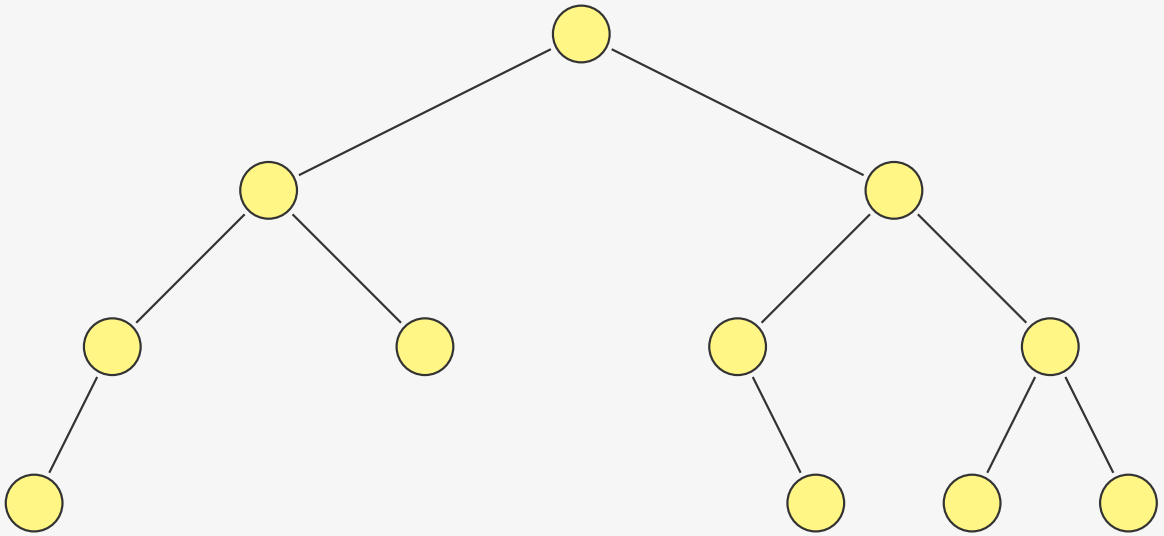
Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

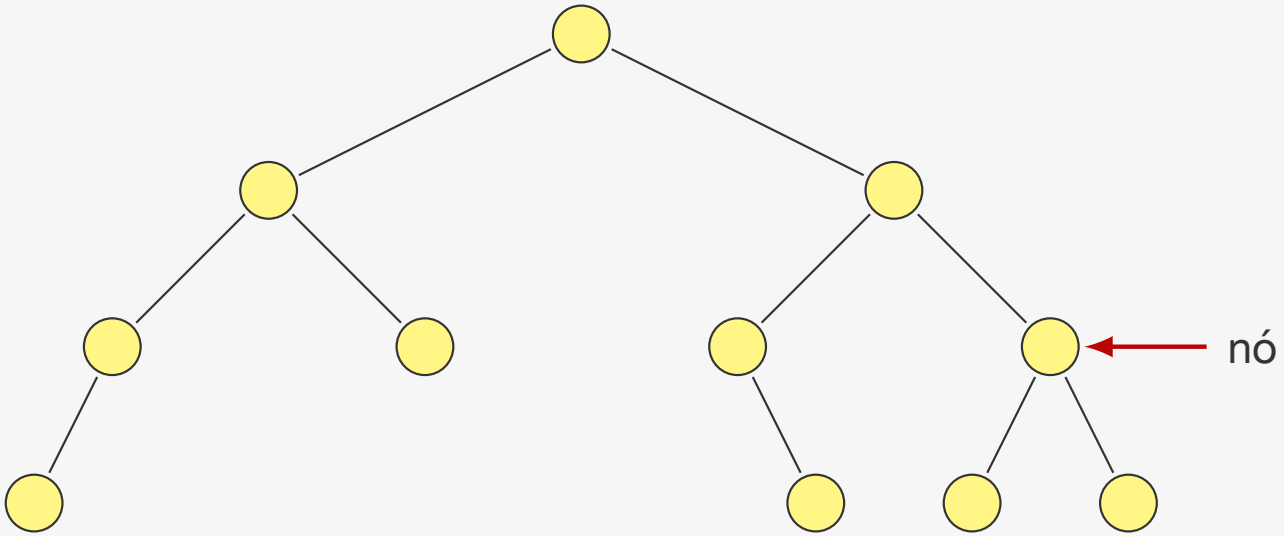
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



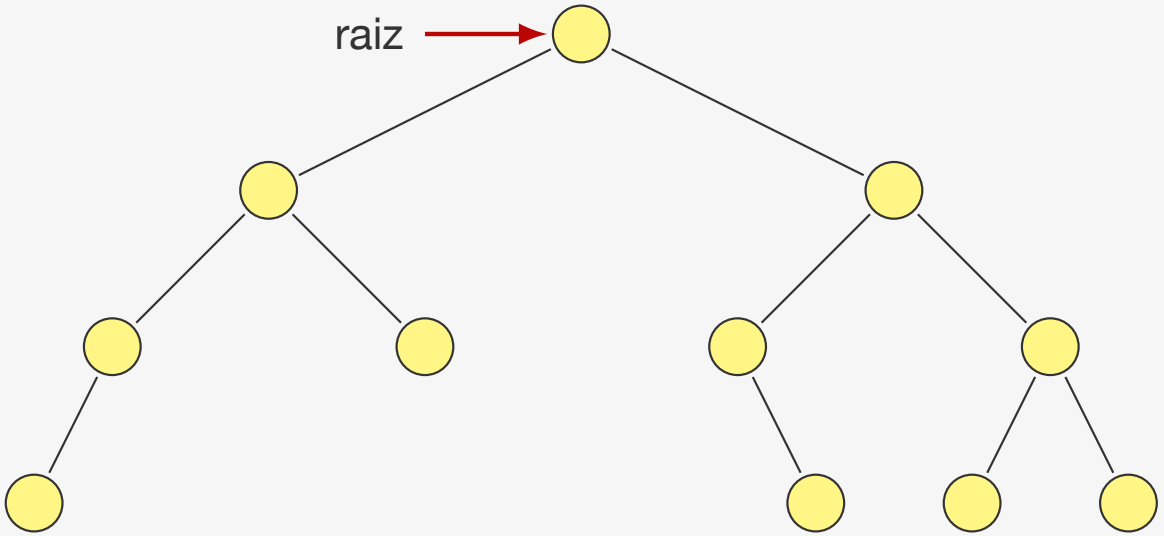
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



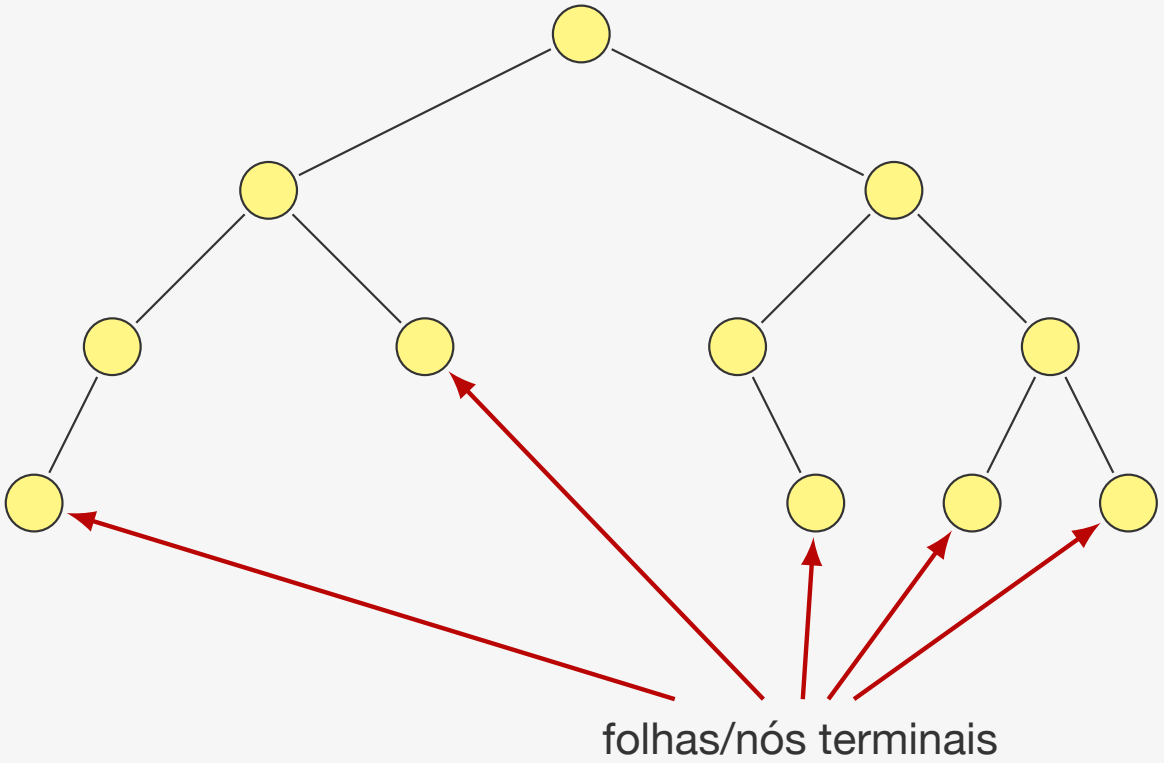
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



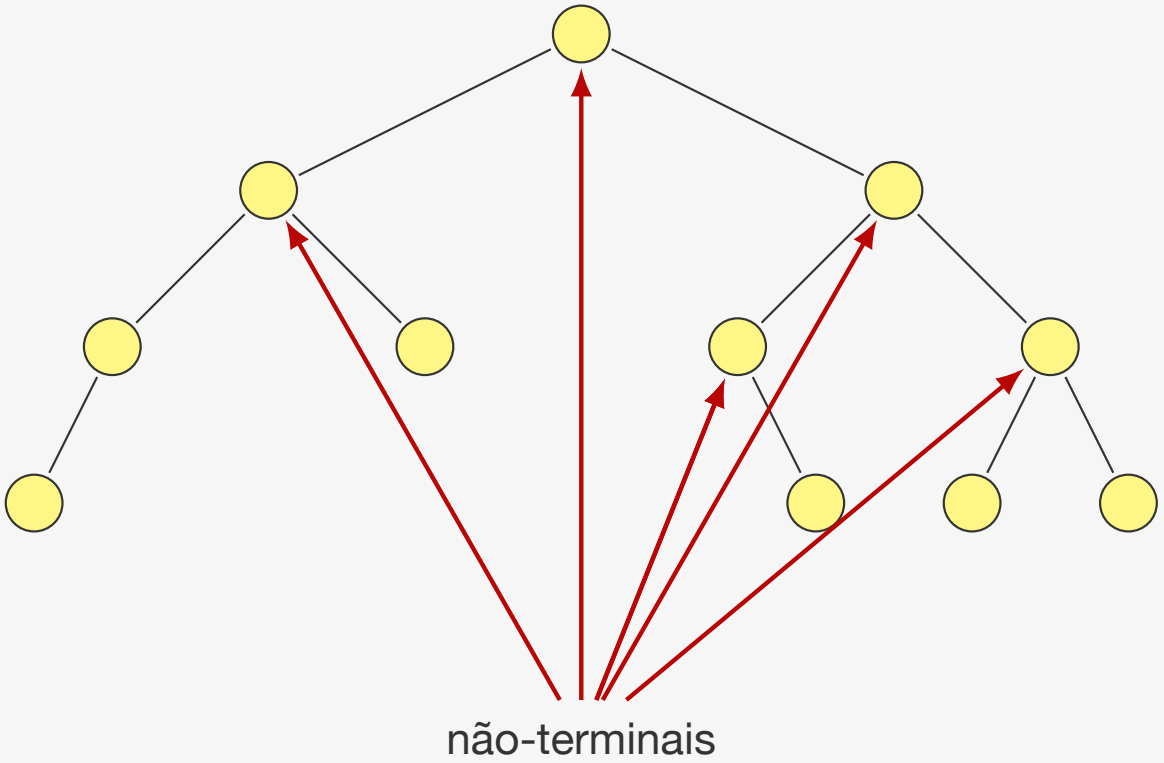
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



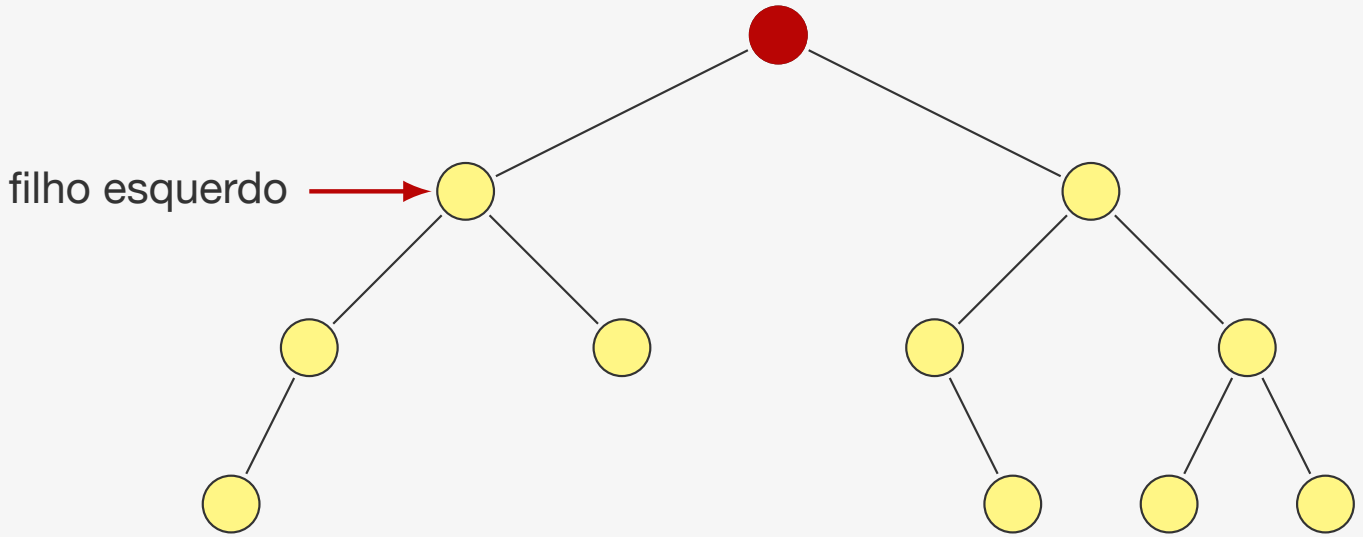
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



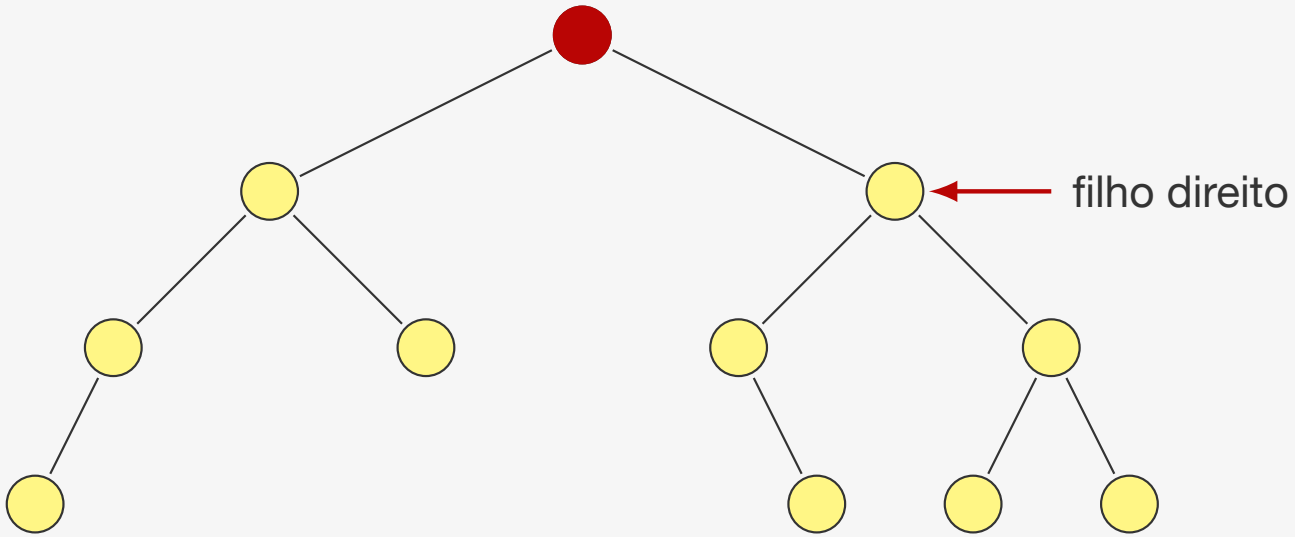
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



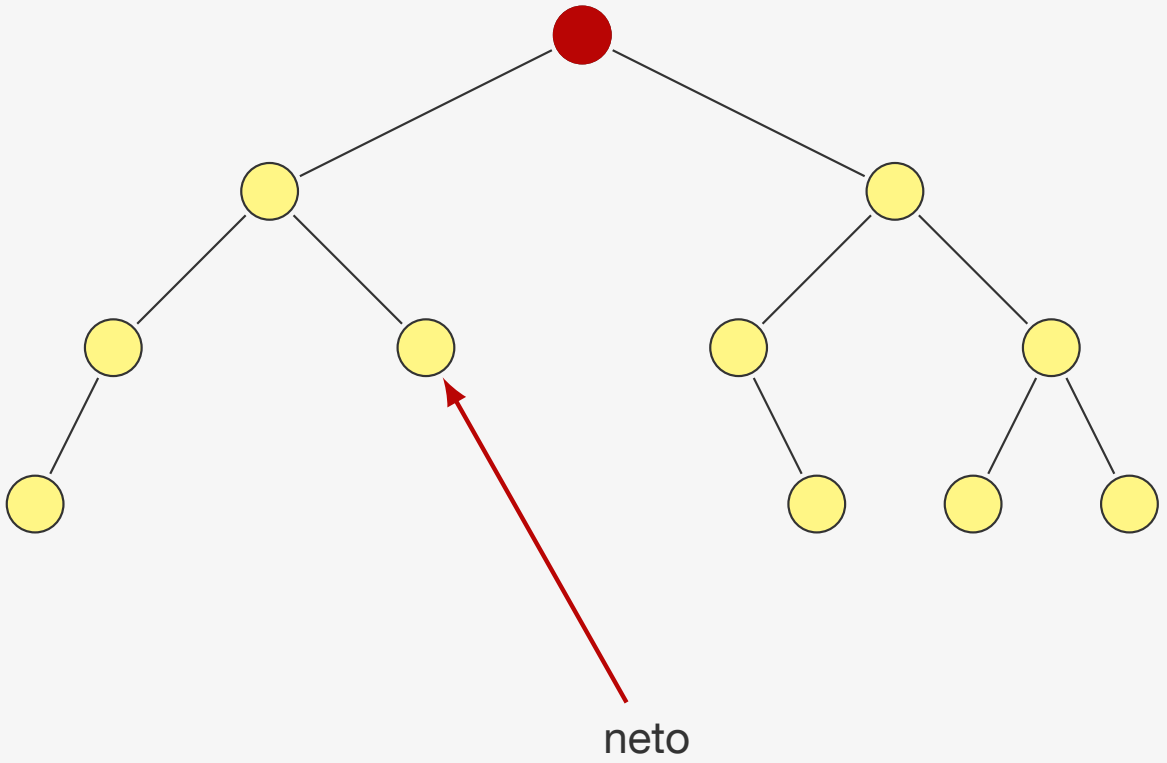
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



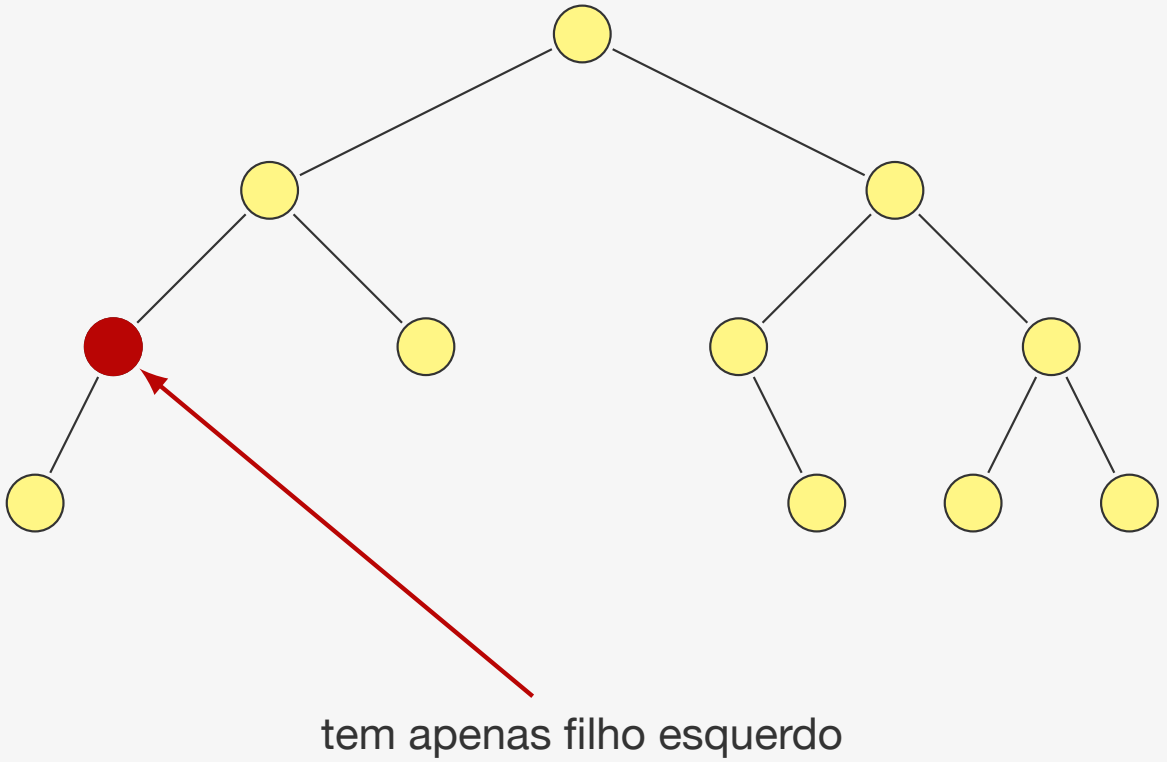
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



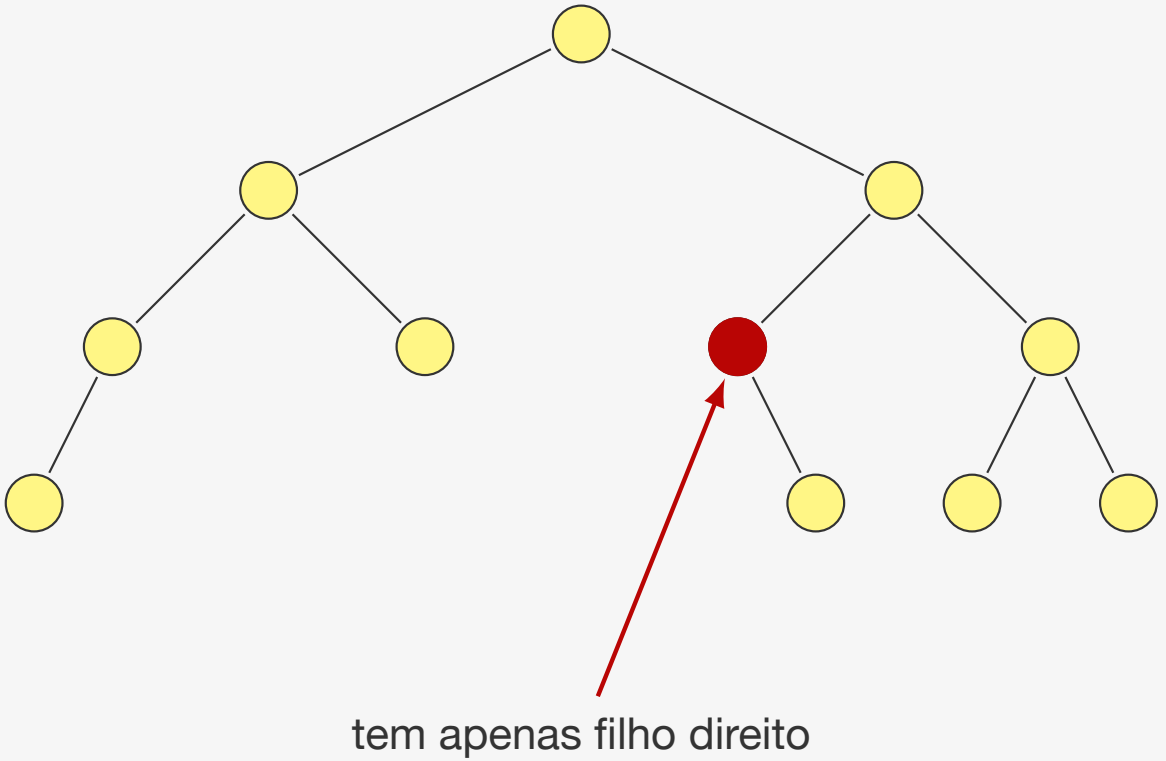
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



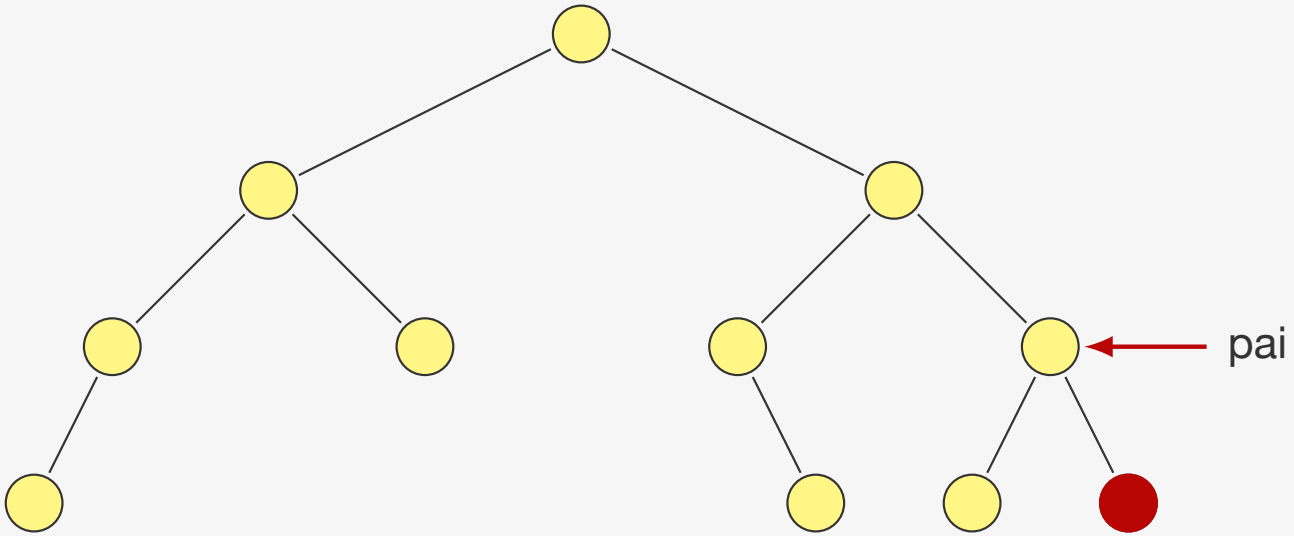
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



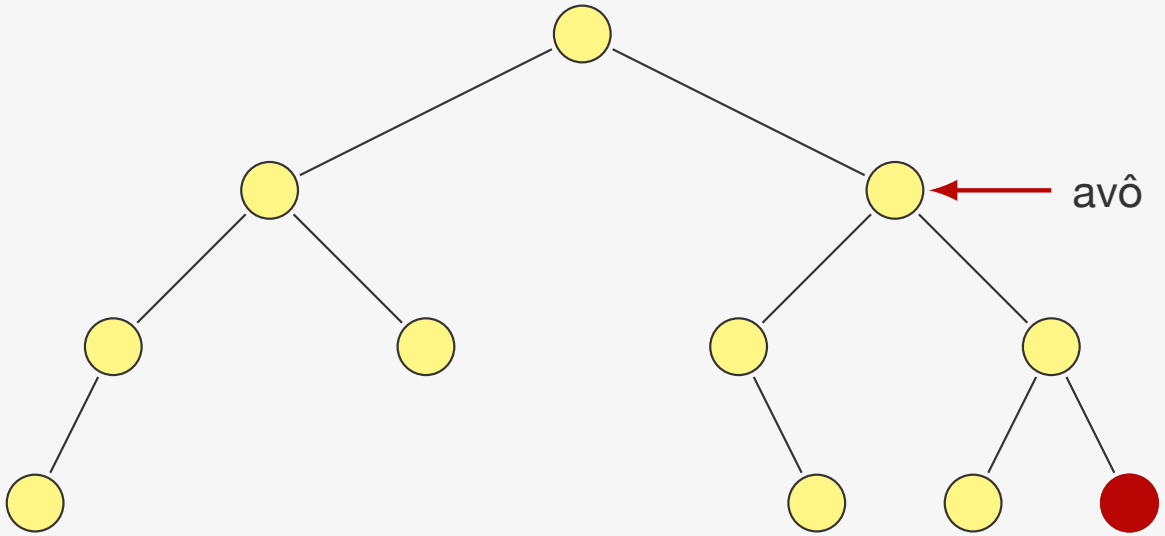
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



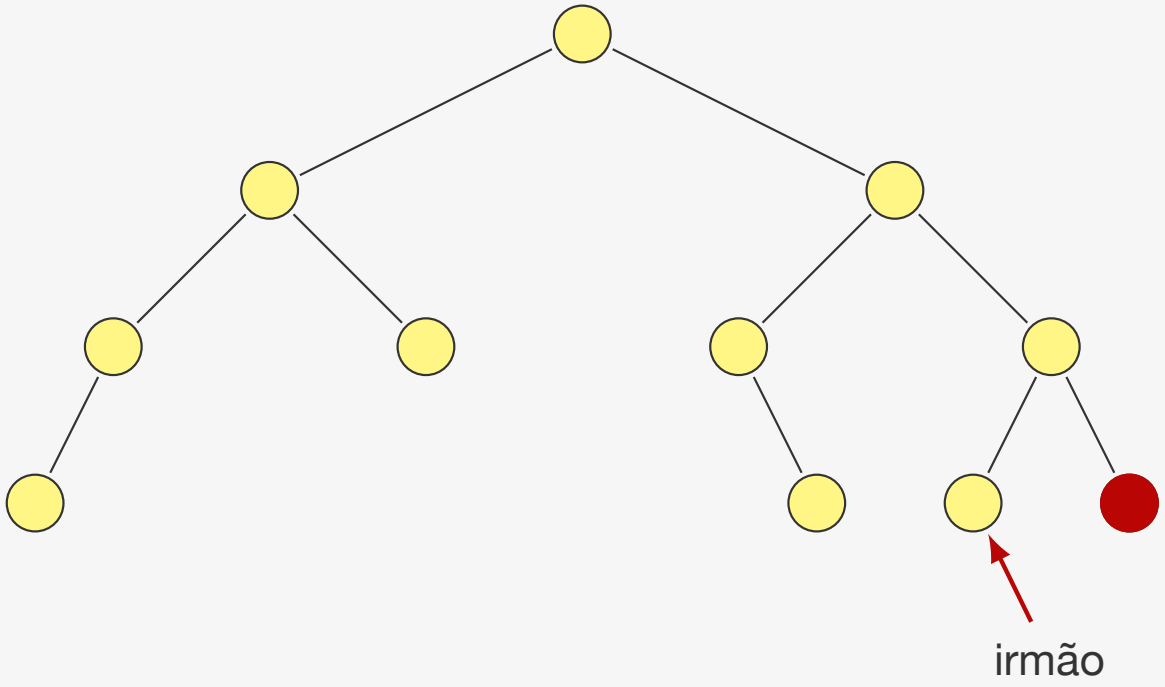
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



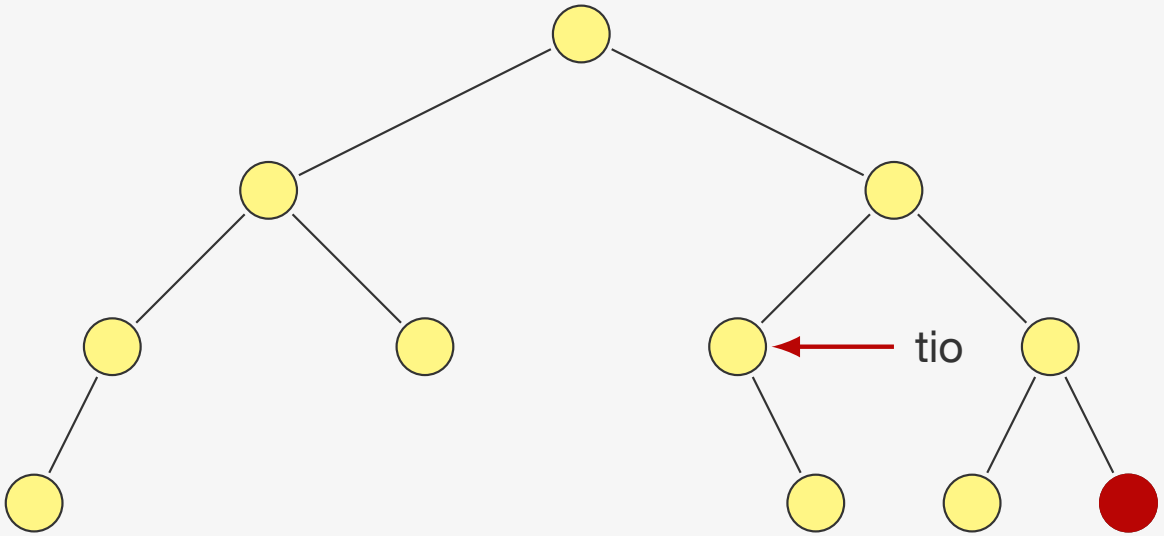
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



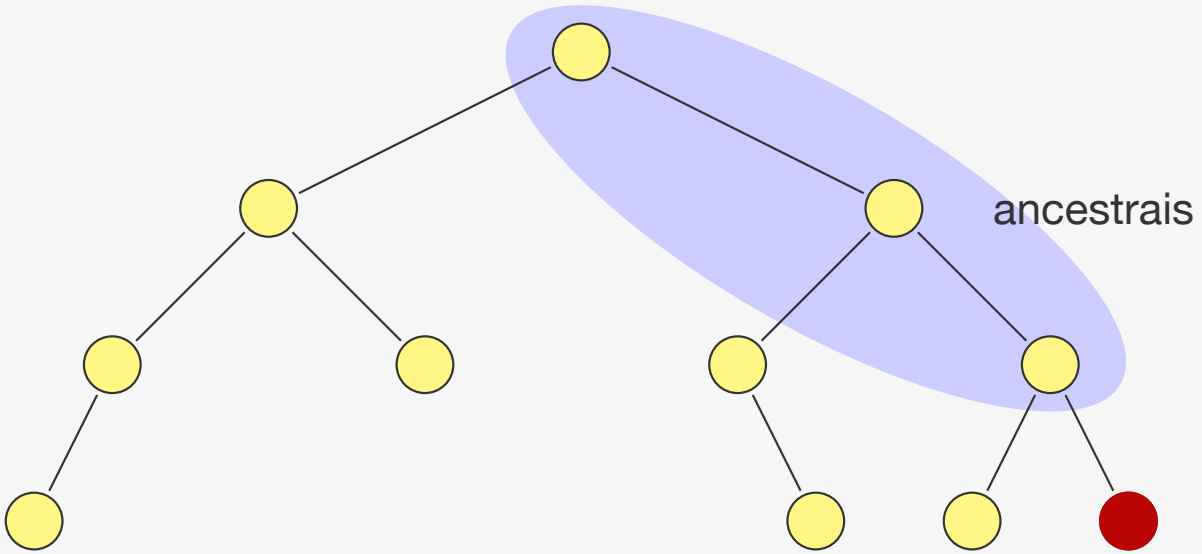
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



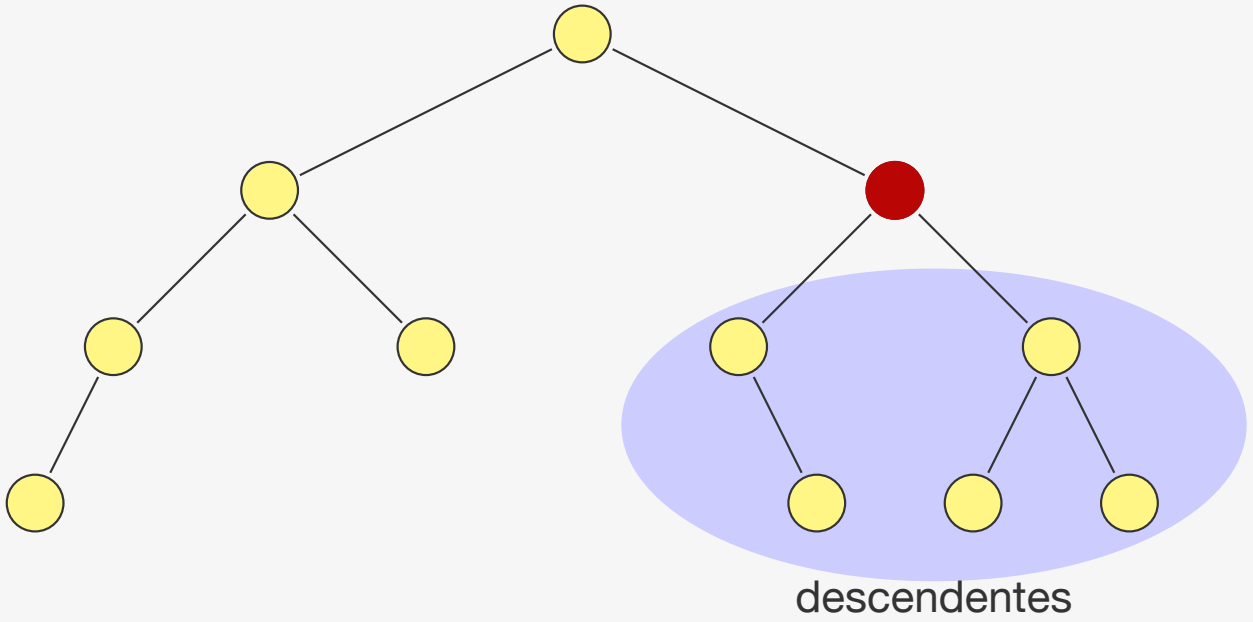
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



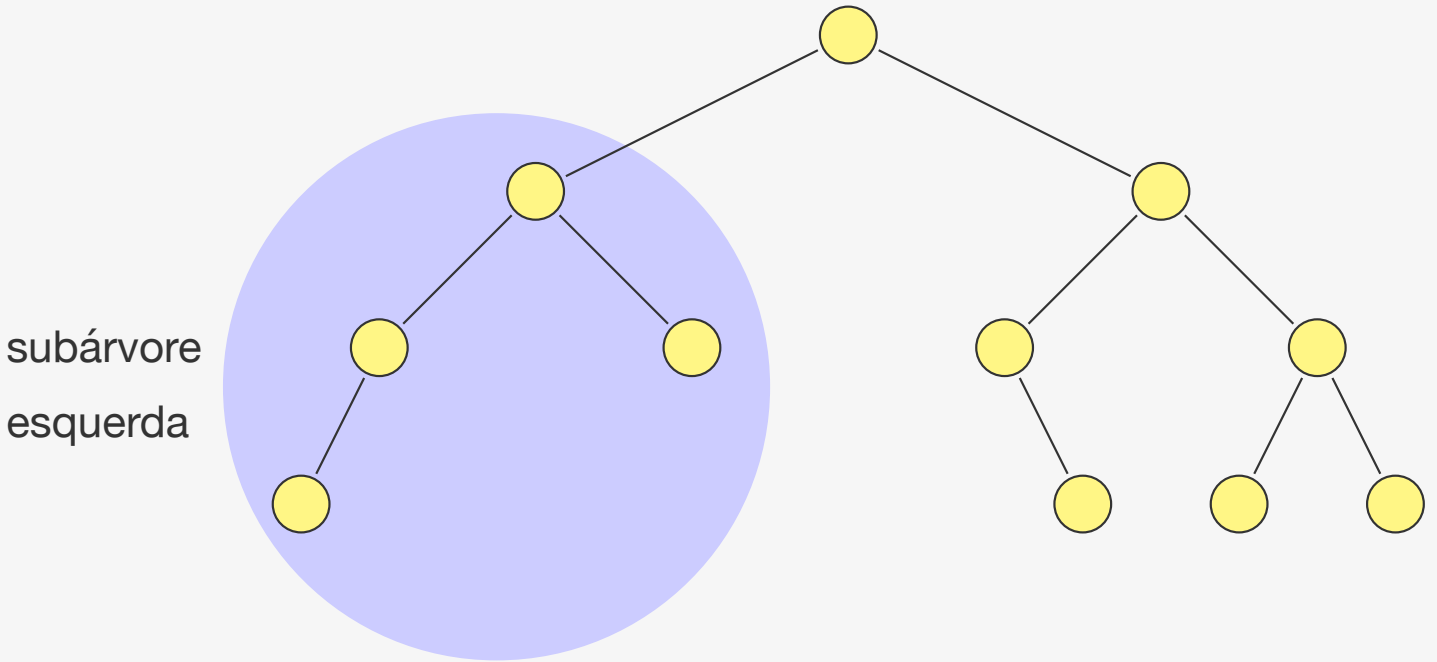
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



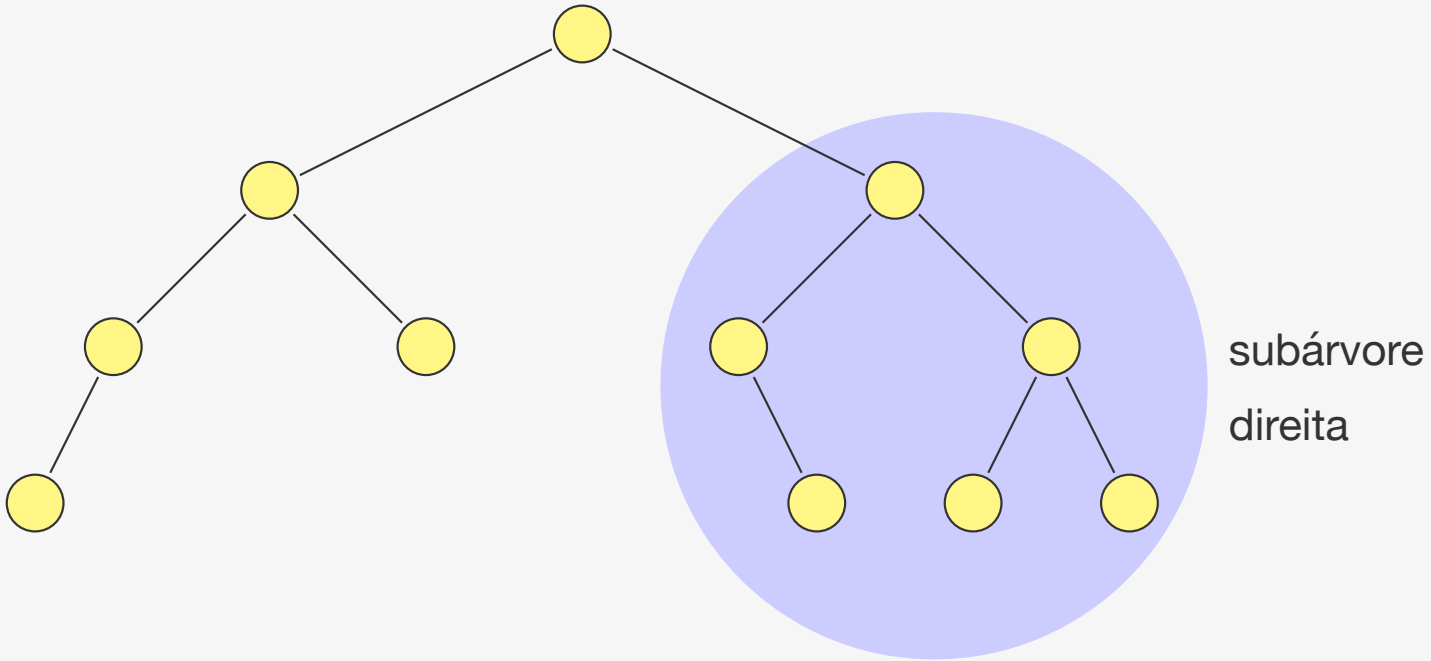
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



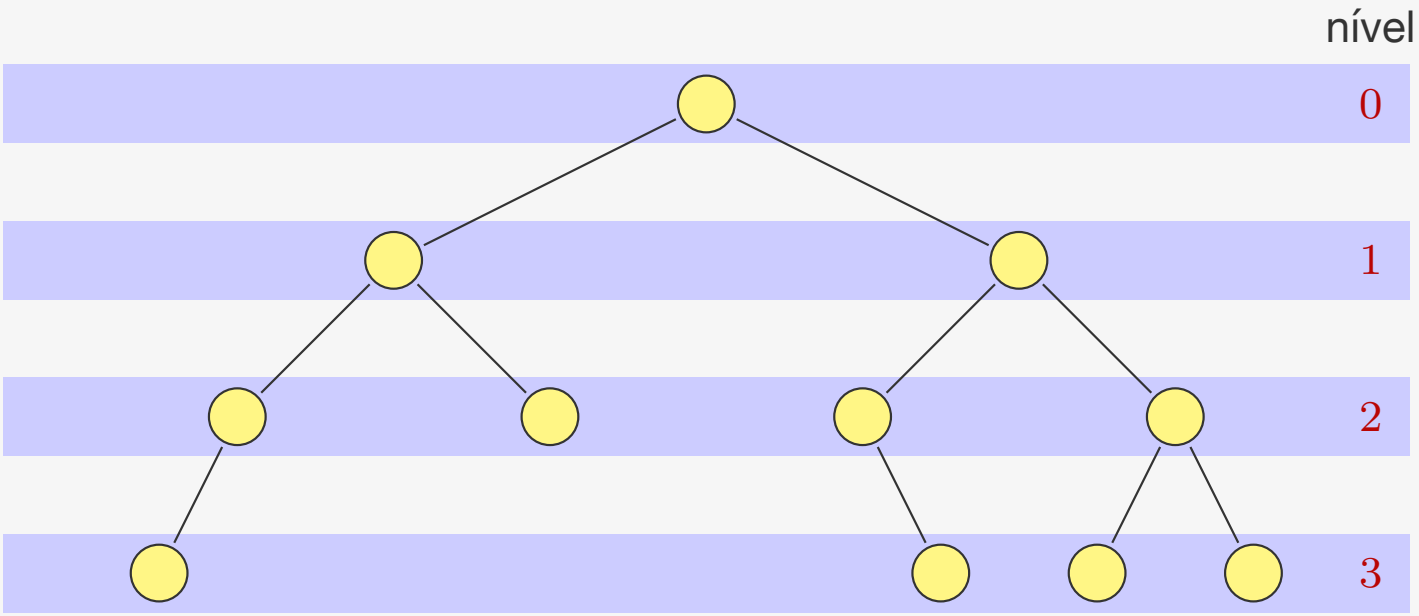
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



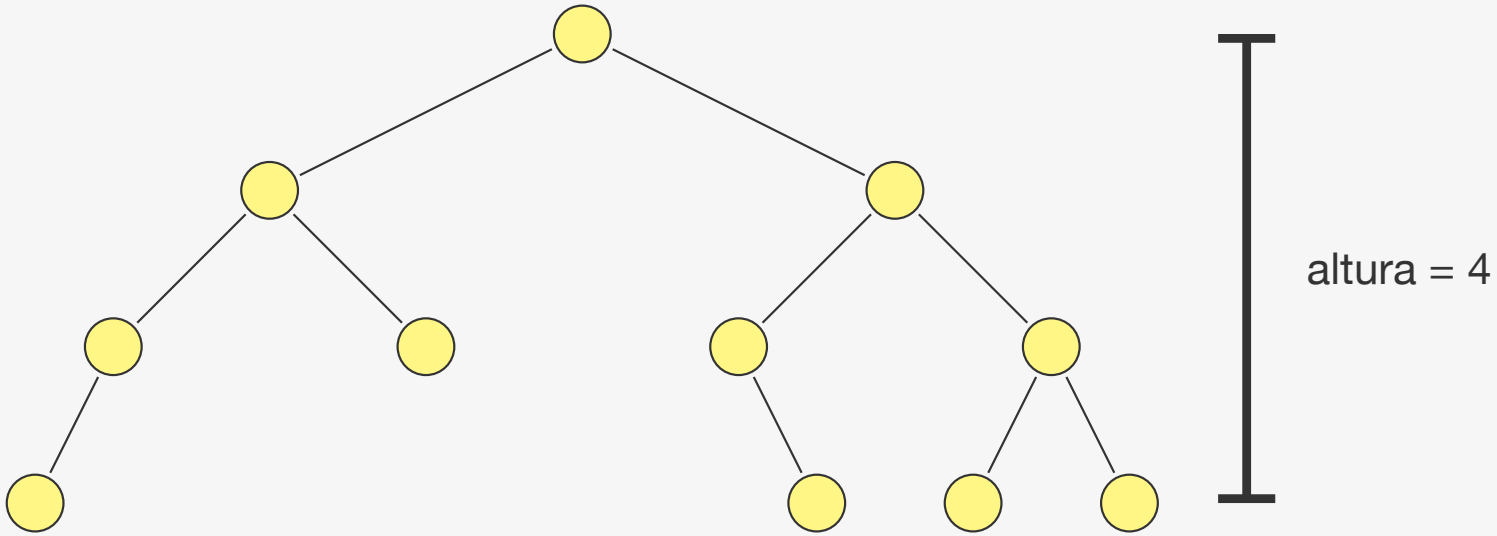
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



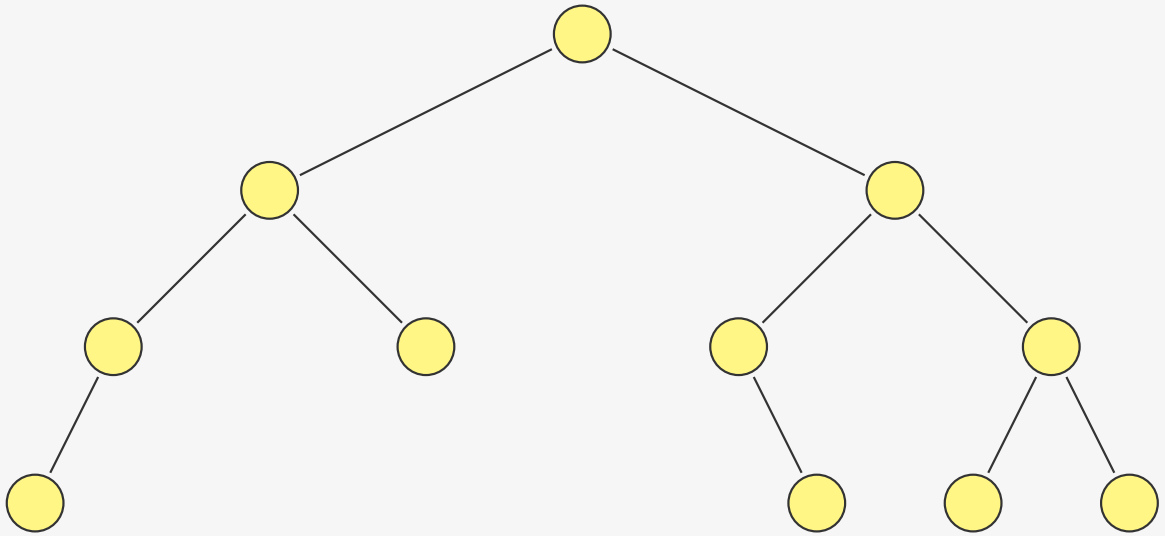
Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:



Árvores Binárias - Relembrando

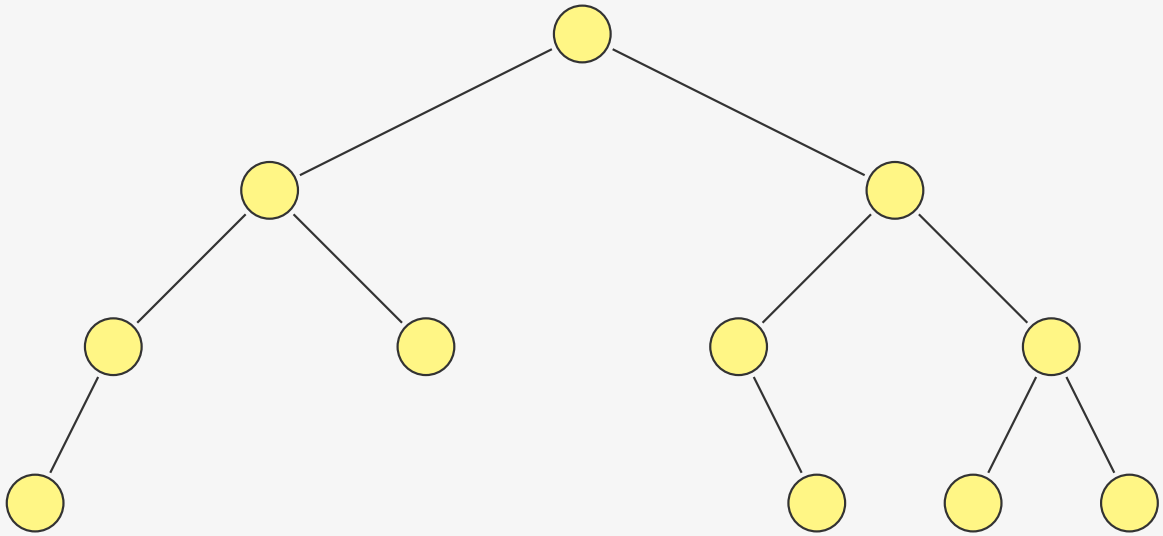
Exemplo de uma árvore binária:



Uma árvore binária é:

Árvores Binárias - Relembrando

Exemplo de uma árvore binária:

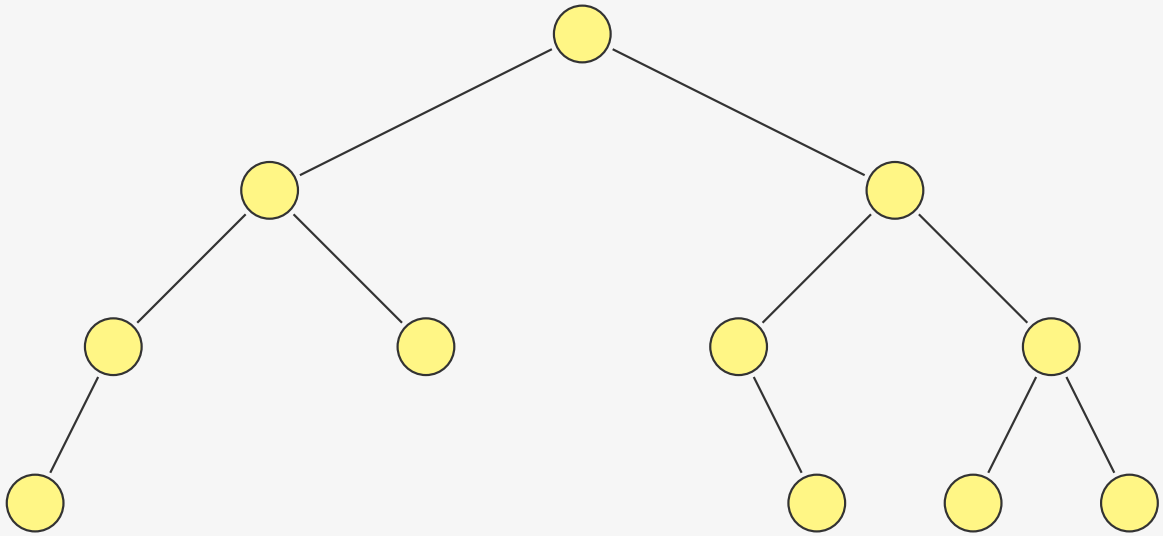


Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio

Árvores Binárias - Relembrando

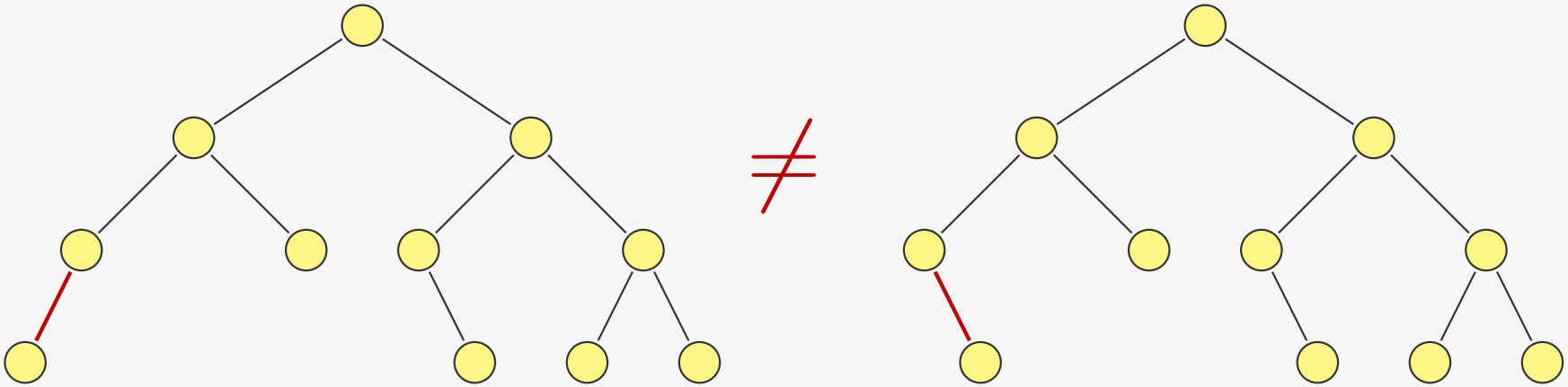
Exemplo de uma árvore binária:



Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou um nó conectado a duas árvores binárias

Comparando com atenção



Ordem dos filhos é relevante!

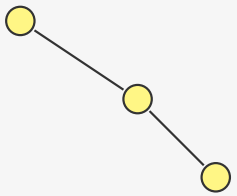
Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

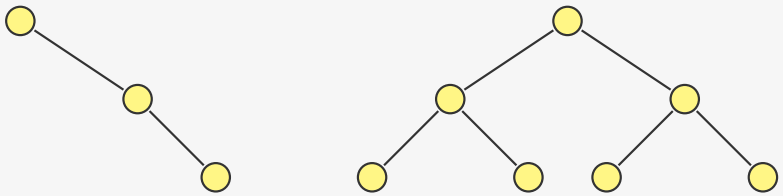
- tem no mínimo h nós



Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

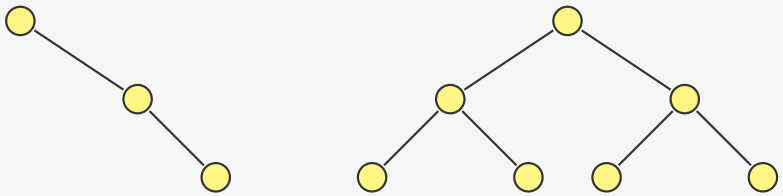
- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós

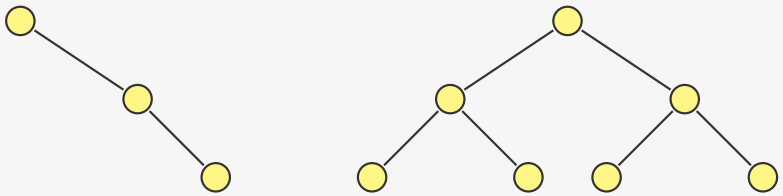


Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



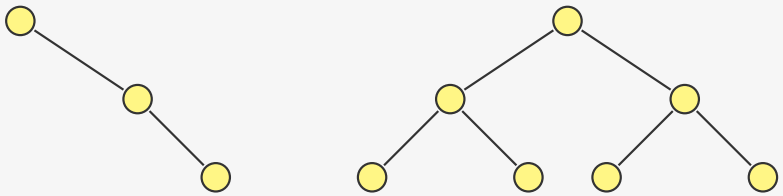
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



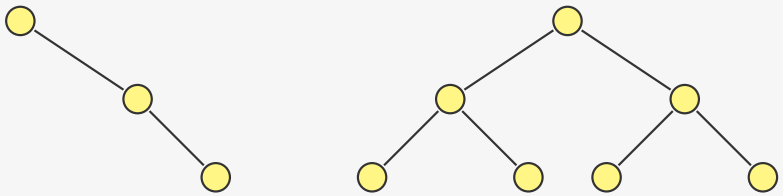
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$
  - quando a árvore é completa

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



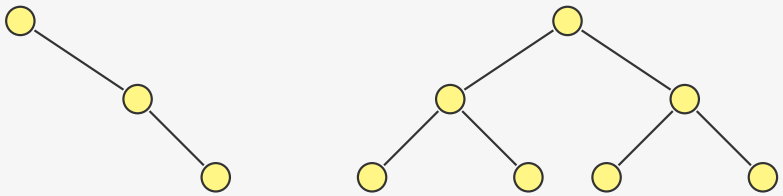
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$
  - quando a árvore é completa
- a altura é no máximo n

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

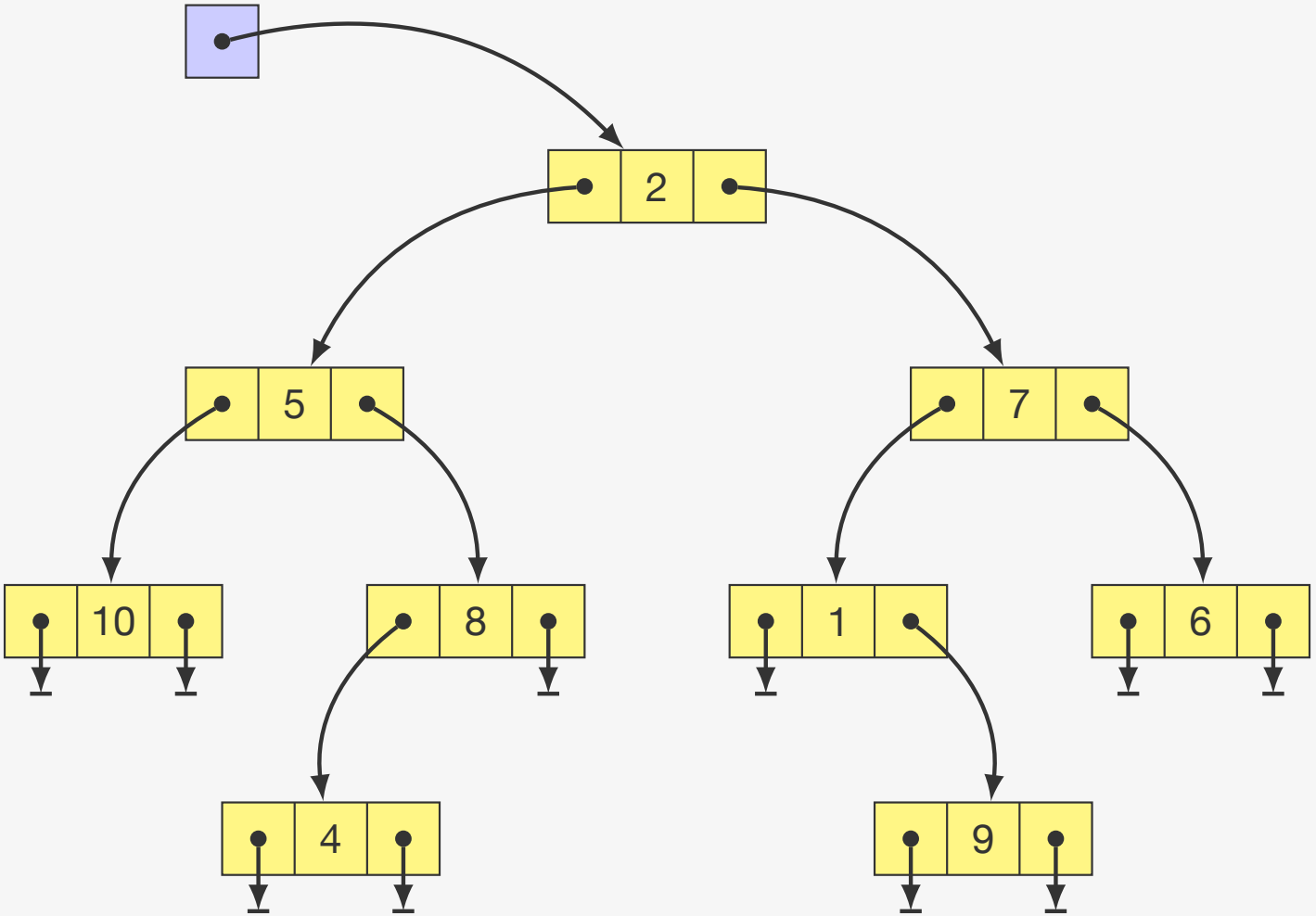
- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



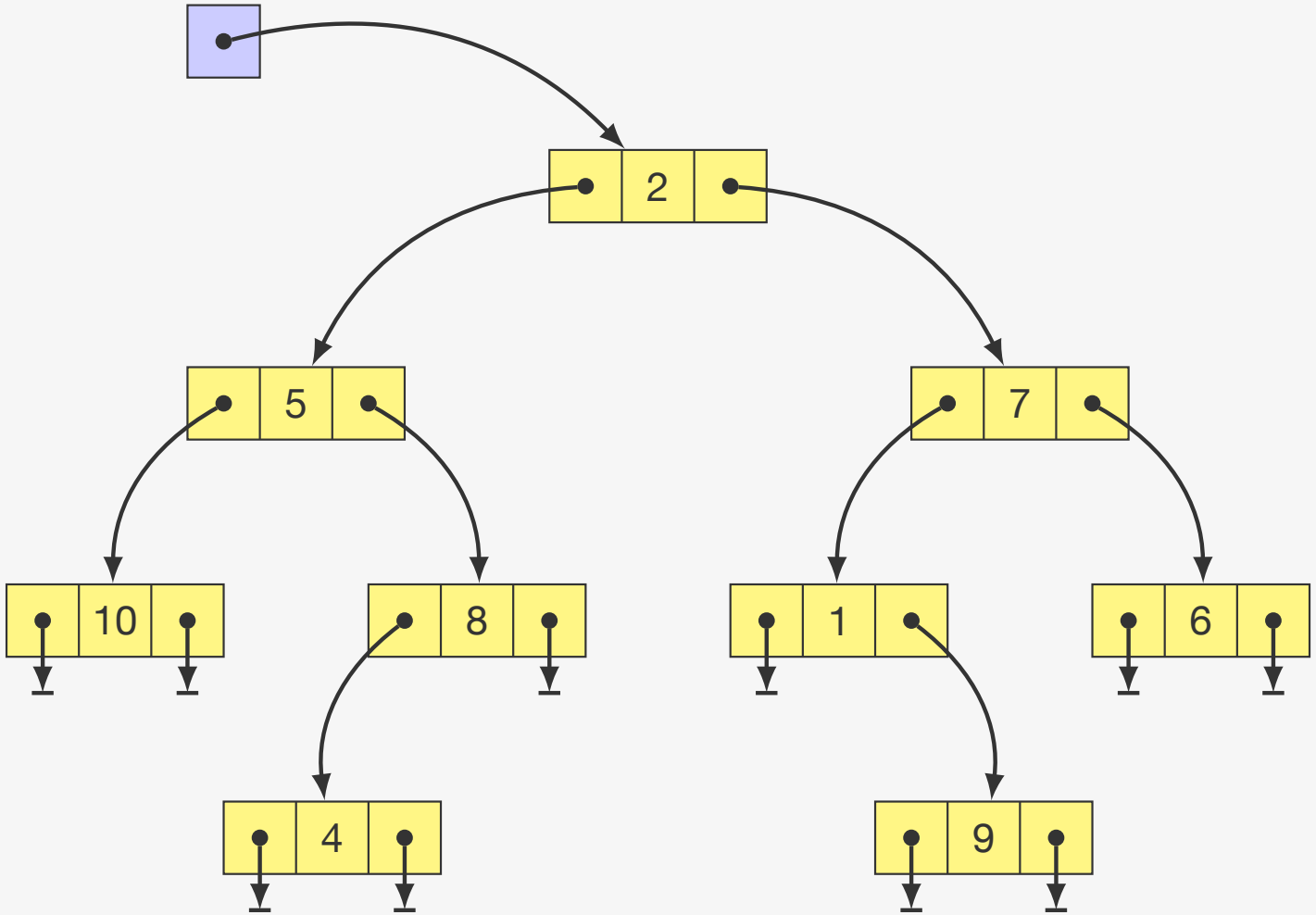
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$
  - quando a árvore é completa
- a altura é no máximo n
  - quando cada nó não-terminal tem apenas um filho

Implementação

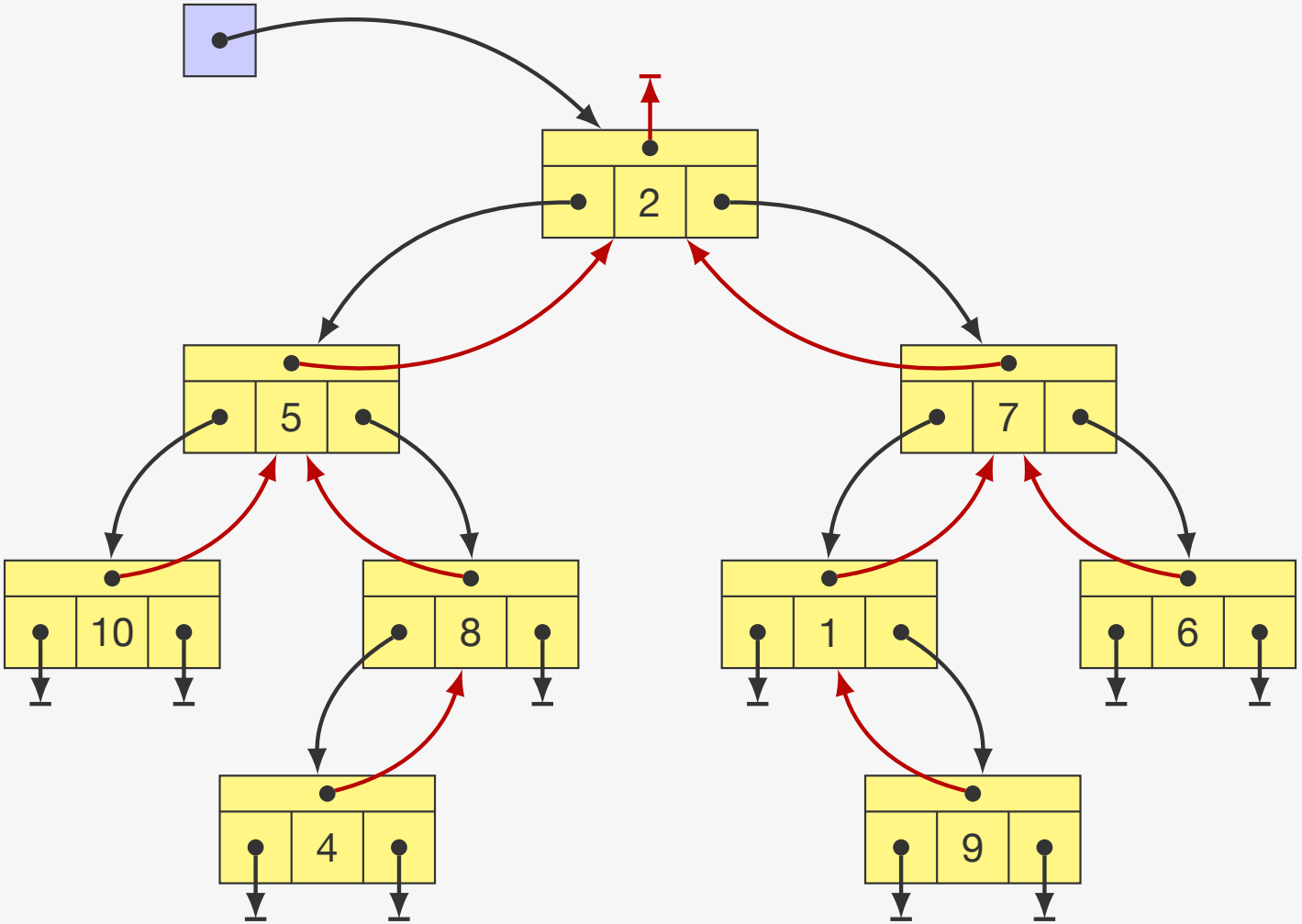


Implementação



E se quisermos saber o pai de um nó?

Implementação com ponteiro para pai



Implementação em C

```c
#ifndef ARVORE_BINARIA_H
#define ARVORE_BINARIA_H

typedef struct No {
    int dado;
    struct No *esq, *dir; /* *pai */
} No;

No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir);

No* procurar_no(No *arvore, int x);

int numero_nos(No *arvore);

int altura(No *arvore);

#endif
```

Criando uma árvore e buscando

```
1 No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir) {
2   No *r = malloc(sizeof(No));
3   r->dado = x;
4   r->esq = esq;
5   r->dir = dir;
6   return r;
7 }
```

Criando uma árvore e buscando

```
1 No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir) {
2   No *r = malloc(sizeof(No));
3   r->dado = x;
4   r->esq = esq;
5   r->dir = dir;
6   return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

Criando uma árvore e buscando

```
1 No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir) {
2   No *r = malloc(sizeof(No));
3   r->dado = x;
4   r->esq = esq;
5   r->dir = dir;
6   return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`

Criando uma árvore e buscando

```
1 No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir) {
2   No *r = malloc(sizeof(No));
3   r->dado = x;
4   r->esq = esq;
5   r->dir = dir;
6   return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`
- faremos muitos algoritmos recursivos

Criando uma árvore e buscando

```
1 No* criar_arvore(int x, No *esq, No *dir) {
2   No *r = malloc(sizeof(No));
3   r->dado = x;
4   r->esq = esq;
5   r->dir = dir;
6   return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`
- faremos muitos algoritmos recursivos

```
1 No* procurar_no(No *arvore, int x) {
2   No *esq;
3   if (arvore == NULL || arvore->dado == x)
4     return arvore;
5   esq = procurar_no(arvore->esq, x);
6   if (esq != NULL)
7     return esq;
8   return procurar_no(arvore->dir, x);
9 }
```

Número de nós e altura

```
1 int numero_nos(No *arvore) {
2   if (arvore == NULL)
3     return 0;
4   return numero_nos(arvore->esq) + numero_nos(arvore->dir) + 1;
5 }
```

Número de nós e altura

```
1 int numero_nos(No *arvore) {
2   if (arvore == NULL)
3     return 0;
4   return numero_nos(arvore->esq) + numero_nos(arvore->dir) + 1;
5 }
```

```
1 int altura(No *arvore) {
2   int h_esq = 0, h_dir = 0;
3   if (arvore == NULL)
4     return 0;
5   h_esq = altura(arvore->esq);
6   h_dir = altura(arvore->dir);
7   return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
8 }
```

Número de nós e altura

```
1 int numero_nos(No *arvore) {
2   if (arvore == NULL)
3     return 0;
4   return numero_nos(arvore->esq) + numero_nos(arvore->dir) + 1;
5 }
```

```
1 int altura(No *arvore) {
2   int h_esq = 0, h_dir = 0;
3   if (arvore == NULL)
4     return 0;
5   h_esq = altura(arvore->esq);
6   h_dir = altura(arvore->dir);
7   return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
8 }
```

Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima

Número de nós e altura

```
1 int numero_nos(No *arvore) {
2   if (arvore == NULL)
3     return 0;
4   return numero_nos(arvore->esq) + numero_nos(arvore->dir) + 1;
5 }
```

```
1 int altura(No *arvore) {
2   int h_esq = 0, h_dir = 0;
3   if (arvore == NULL)
4     return 0;
5   h_esq = altura(arvore->esq);
6   h_dir = altura(arvore->dir);
7   return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
8 }
```

Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima

- você vai precisar de uma pilha...

Exemplo: Criando um torneio

Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

Exemplo: Criando um torneio

Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves

Exemplo: Criando um torneio

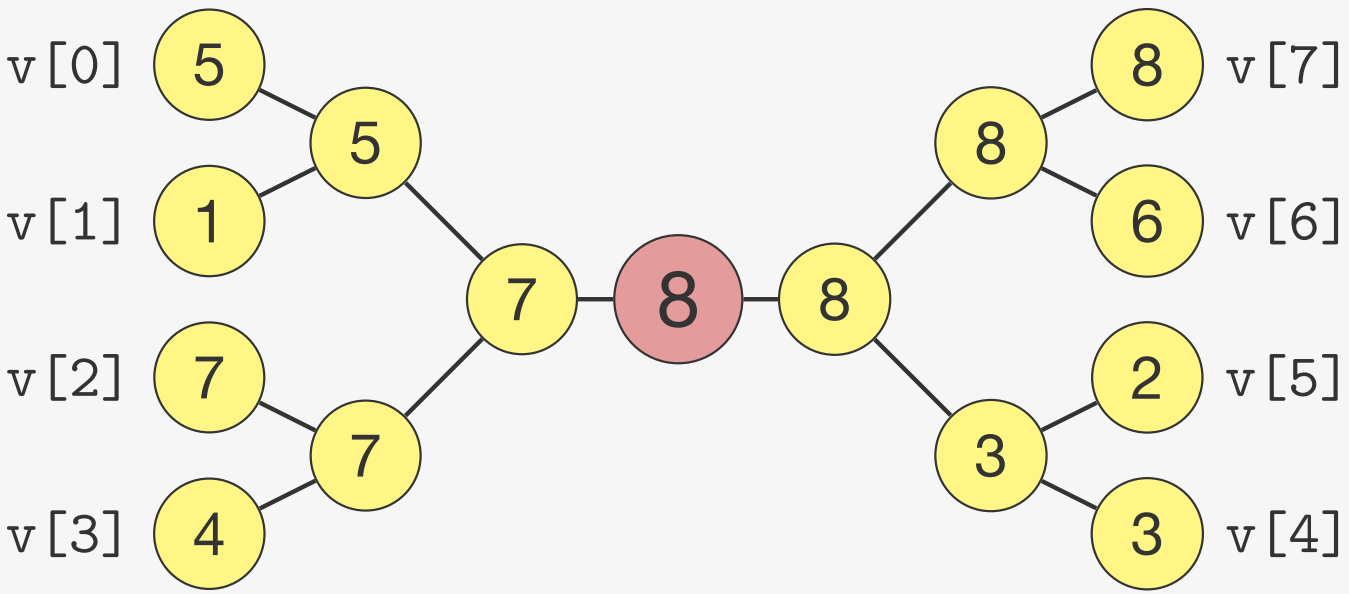
Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
  - Ex.: para `n = 8`, temos quartas de final, semifinal e final

Exemplo: Criando um torneio

Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

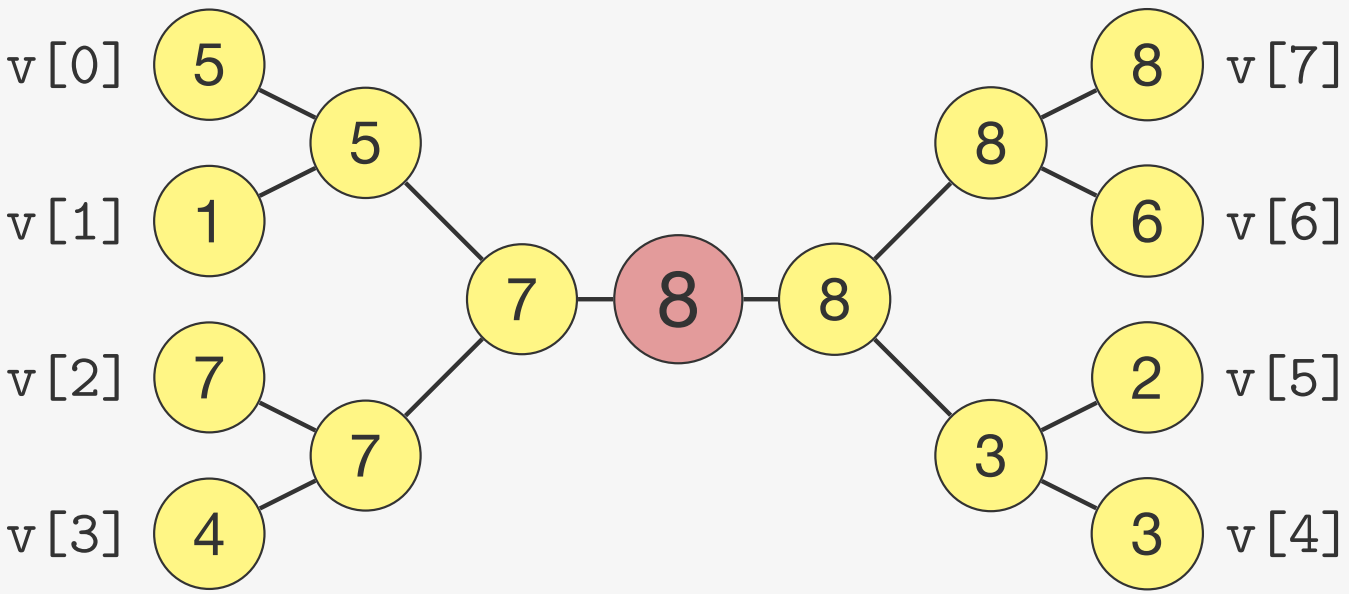
- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
  - Ex.: para `n = 8`, temos quartas de final, semifinal e final



Exemplo: Criando um torneio

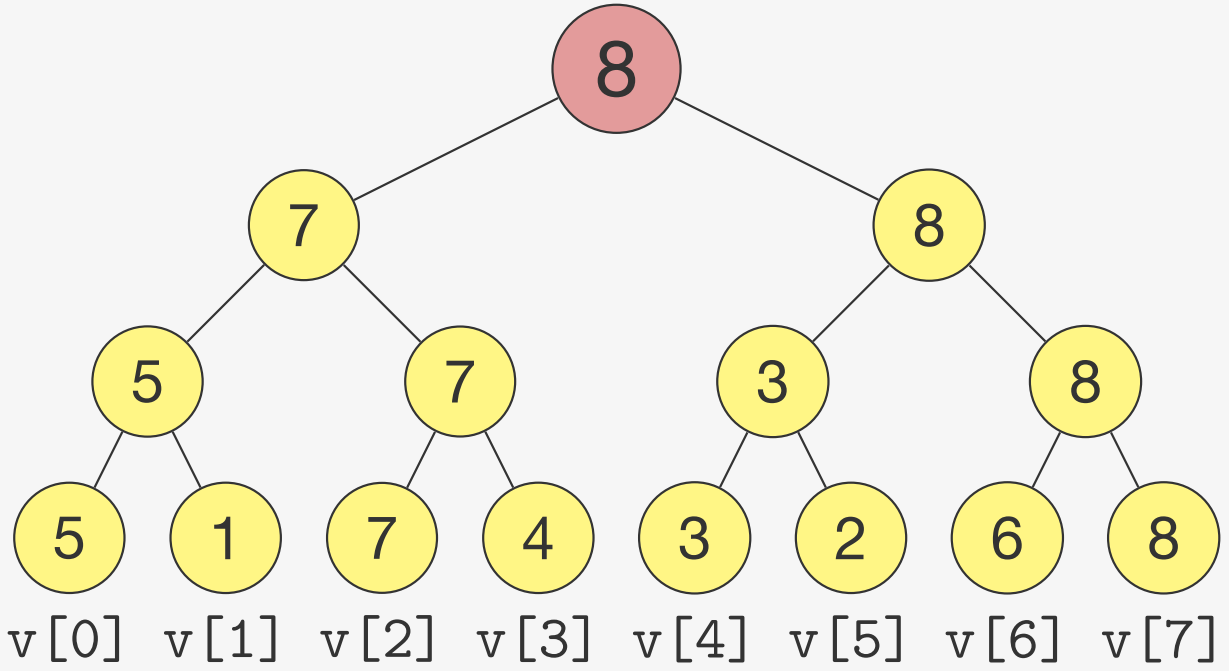
Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
  - Ex.: para `n = 8`, temos quartas de final, semifinal e final

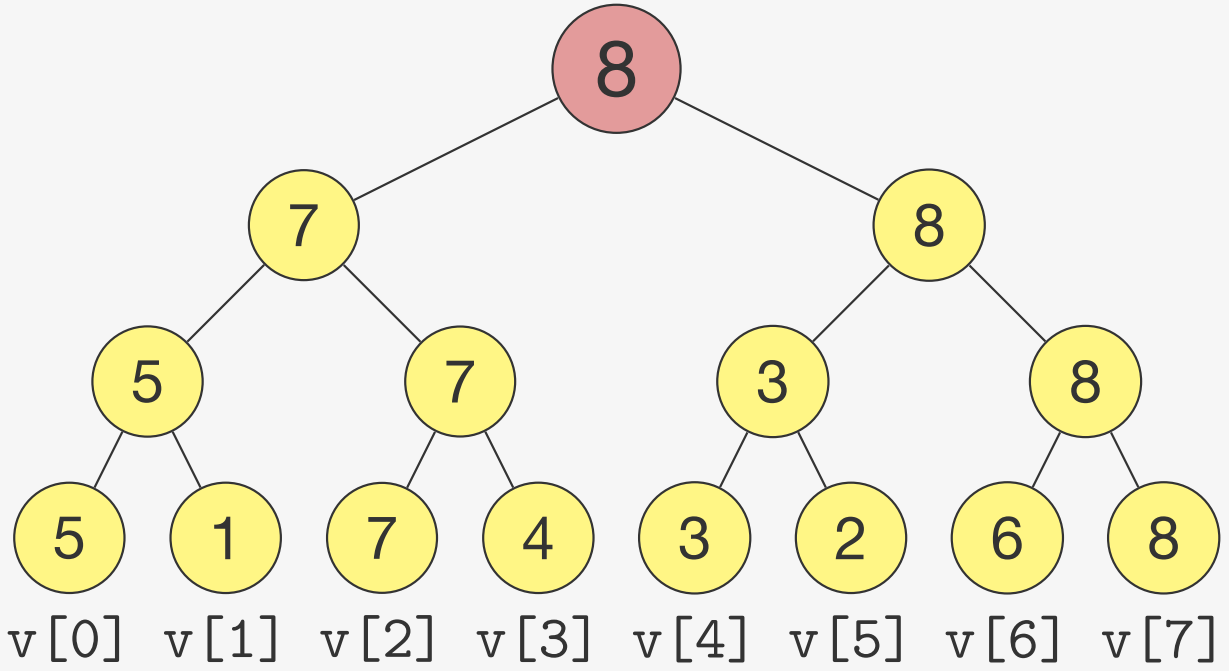


É uma árvore binária, onde o valor do pai é o maior valor dos seus filhos

Exemplo: Criando um torneio

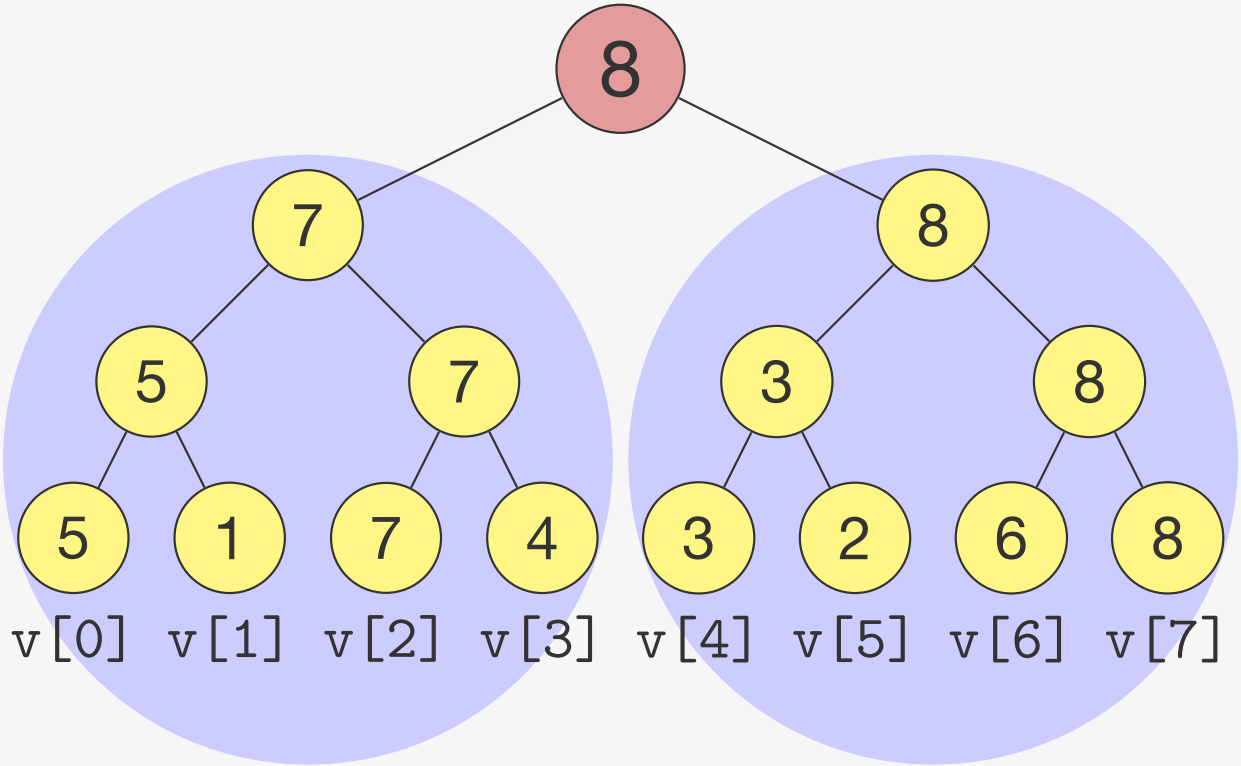


Exemplo: Criando um torneio



Para resolver o torneio:

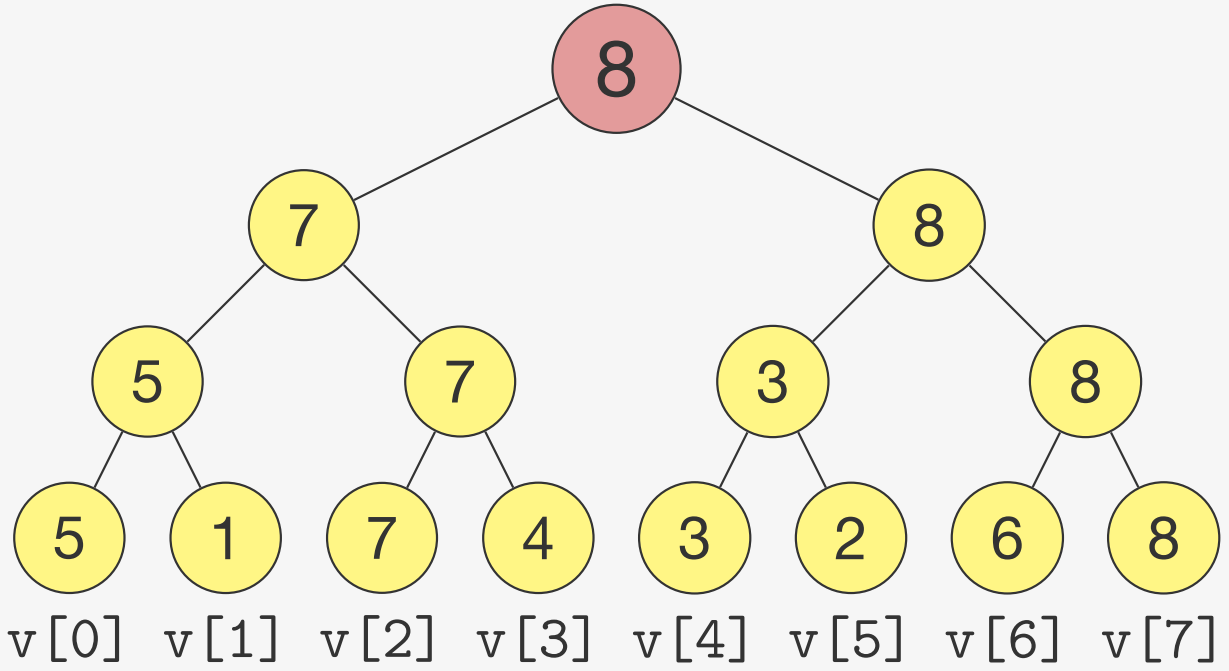
Exemplo: Criando um torneio



Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente

Exemplo: Criando um torneio

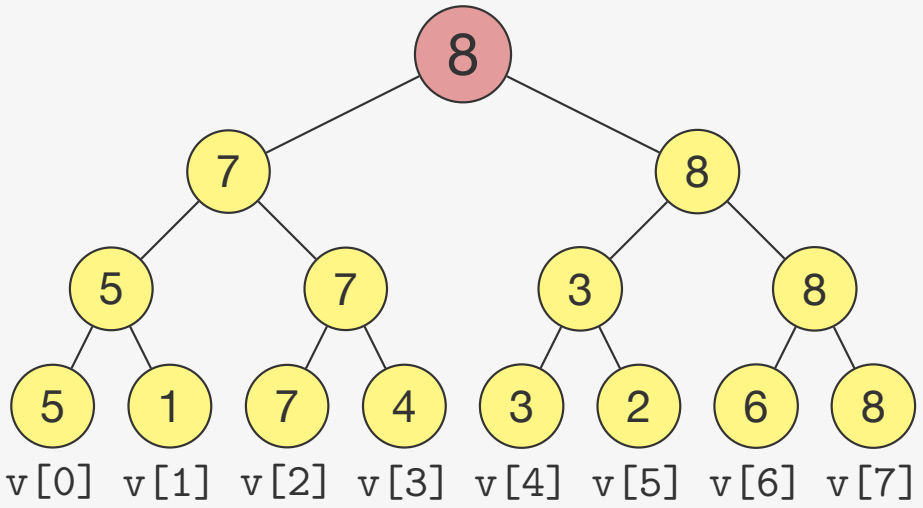


Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente
- decida o vencedor

Exemplo: Criando um torneio

```
1  No* torneio(int *v, int l, int r) {
2    int m = (l+r)/2;
3    No *t = criar_arvore(v[m], NULL, NULL);
4    if (l < r) {
5      t->esq = torneio(v, l, m);
6      t->dir = torneio(v, m+1, r);
7      if (t->esq->dado > t->dir->dado)
8        t->dado = t->esq->dado;
9      else
10       t->dado = t->dir->dado;
11   }
12   return t;
13 }
```



Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda

Percorrendo os nós - Pré-ordem

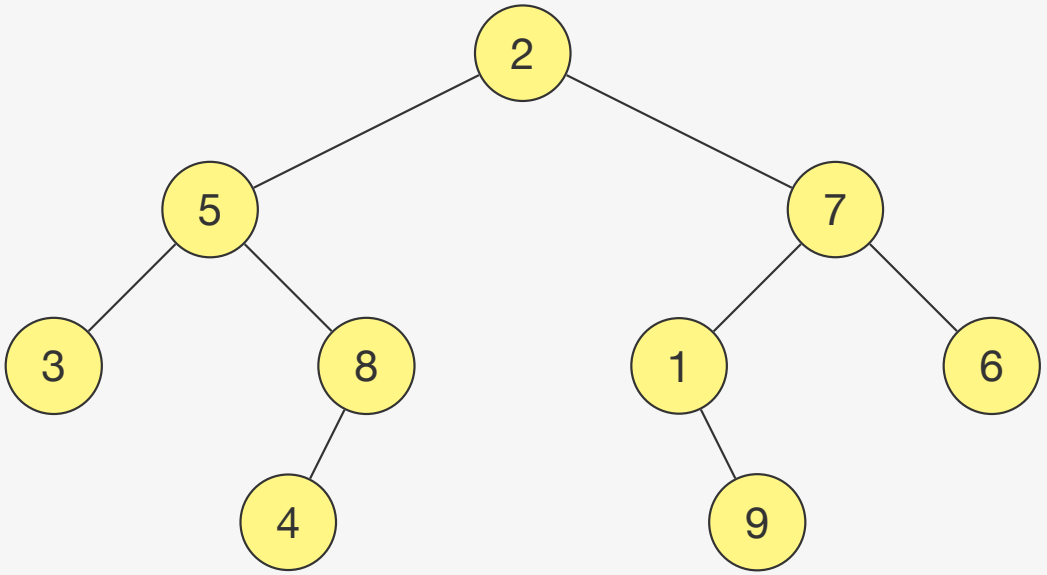
A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

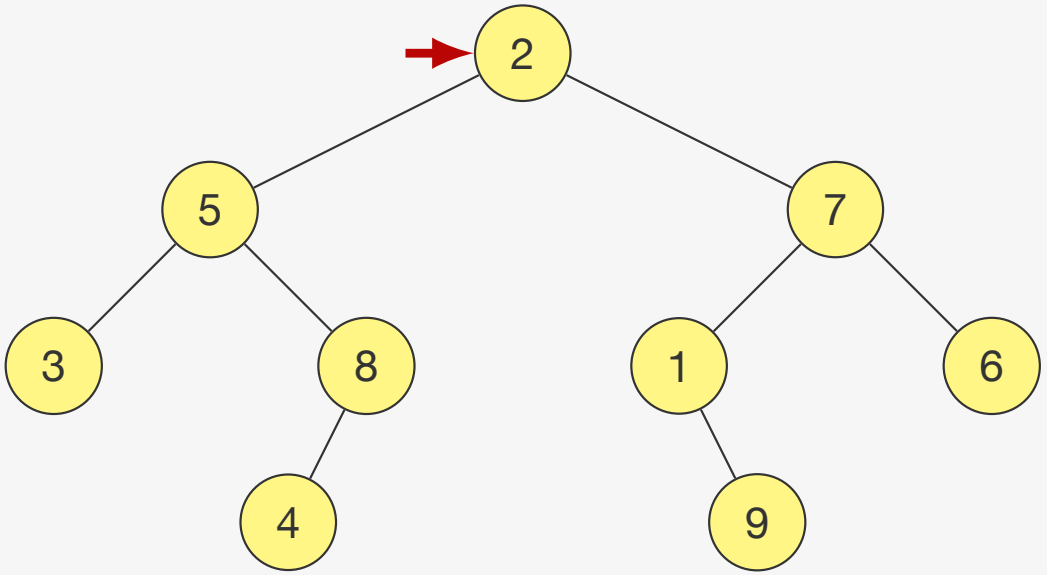


Ex:

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

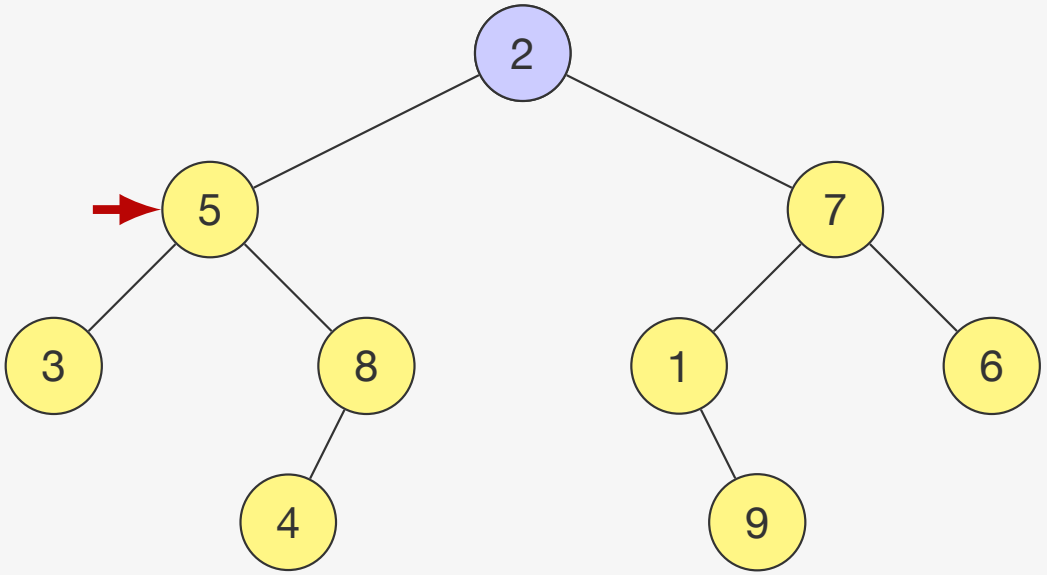


Ex:

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

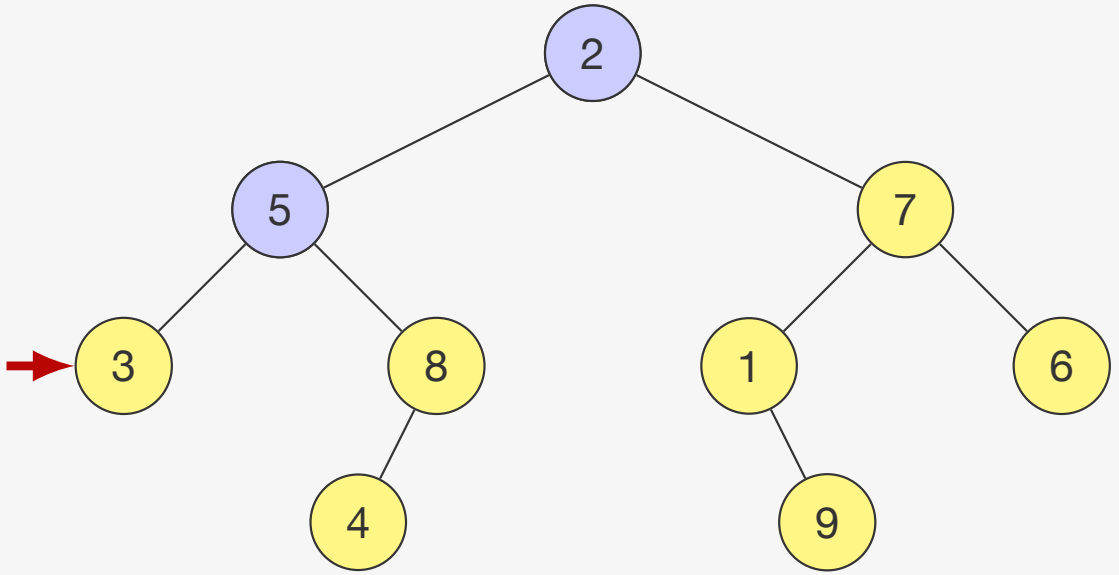


Ex: 2,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

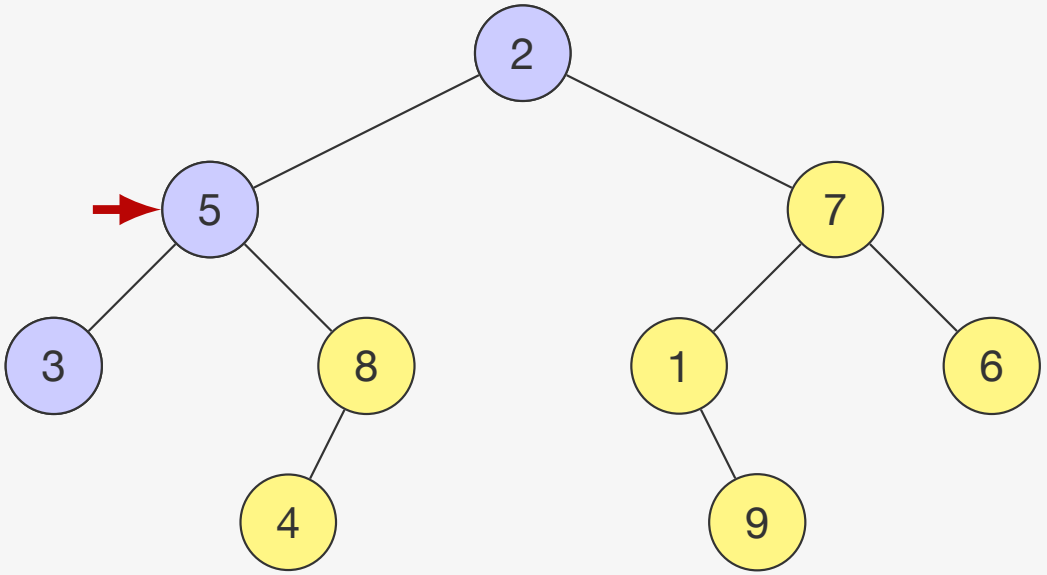


Ex: 2, 5,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

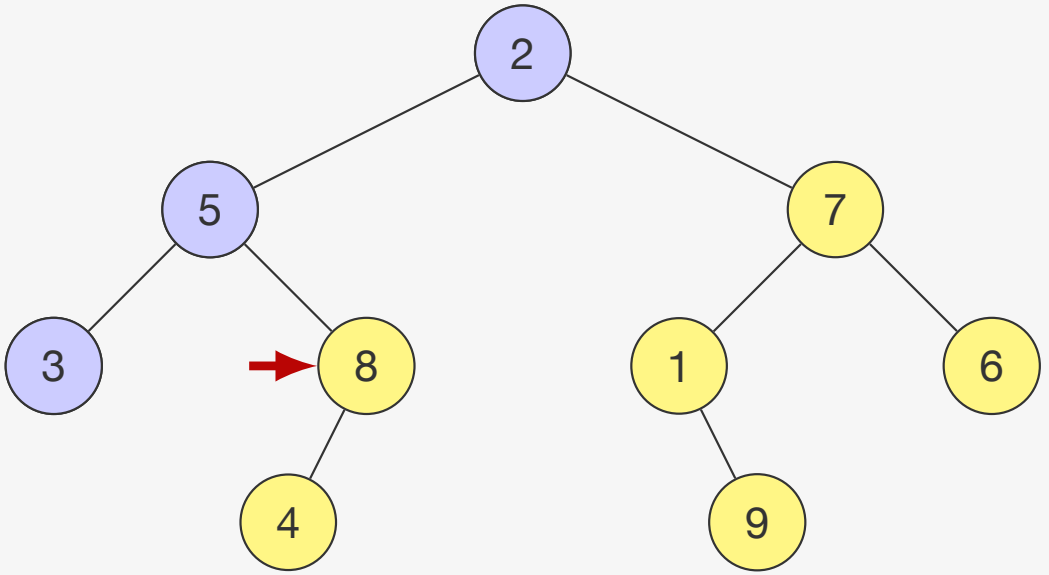


Ex: 2, 5, 3,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

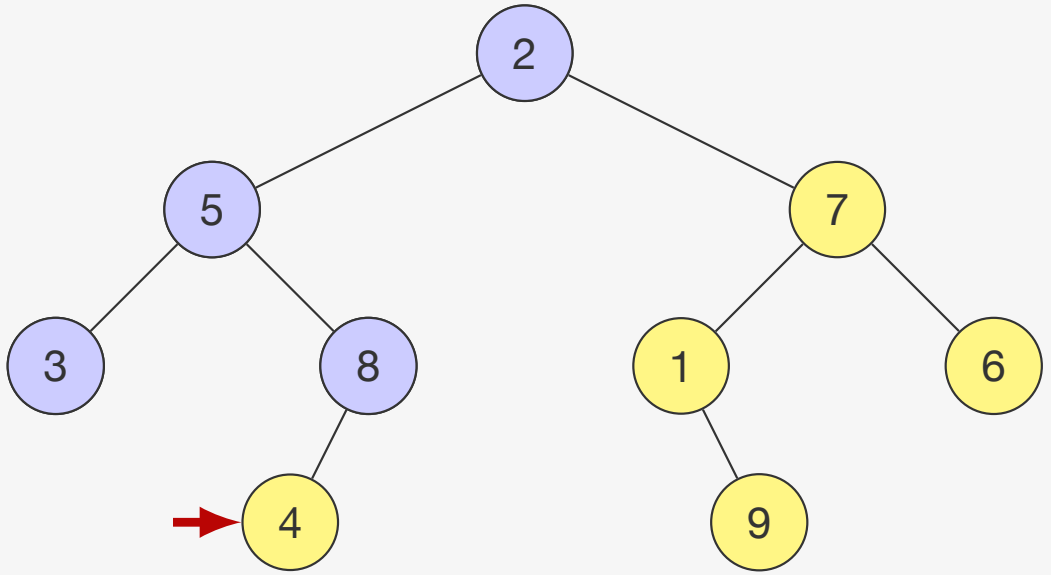


Ex: 2, 5, 3,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

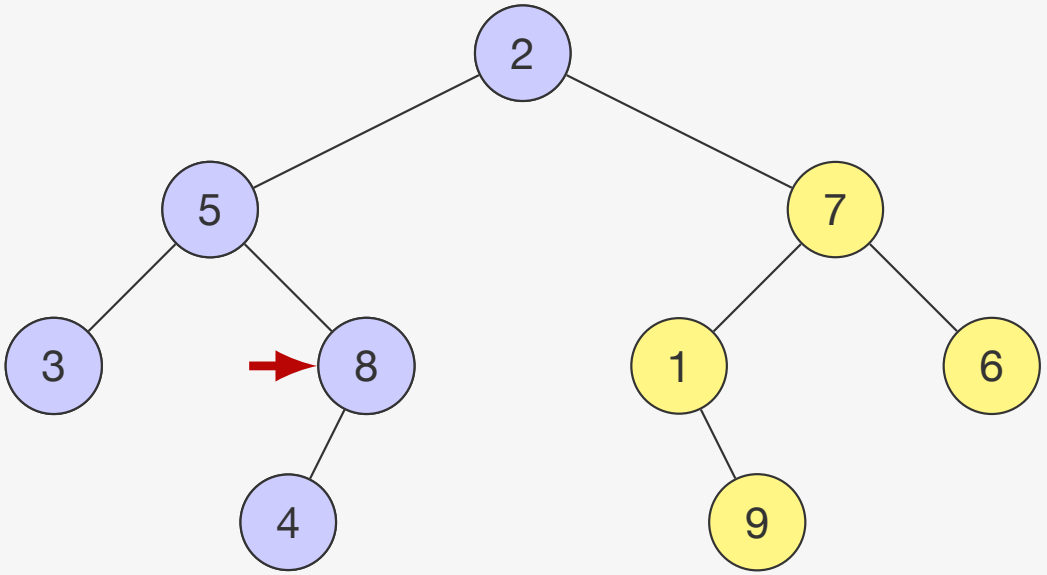


Ex: 2, 5, 3, 8,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

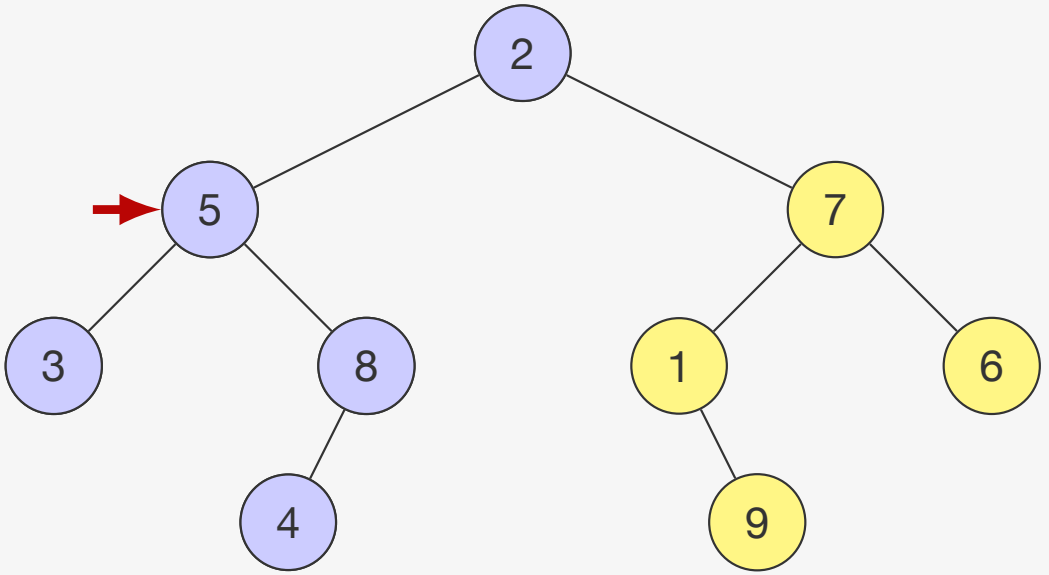


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

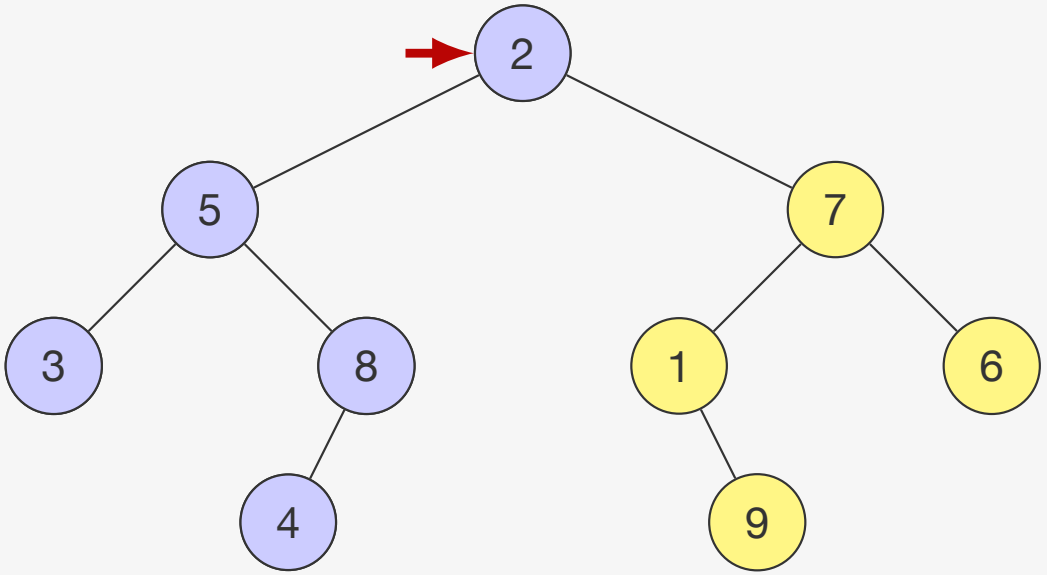


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

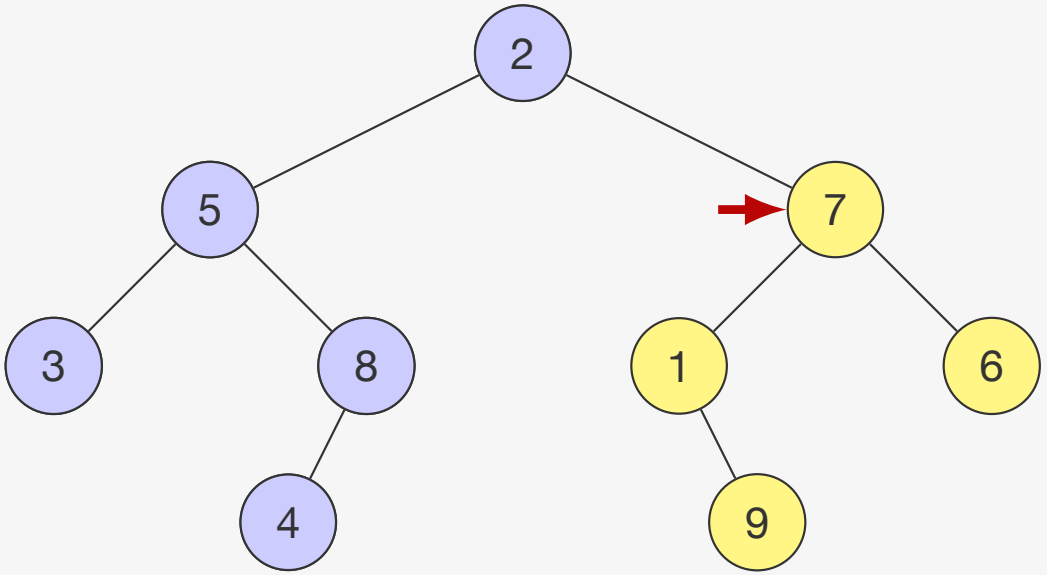


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

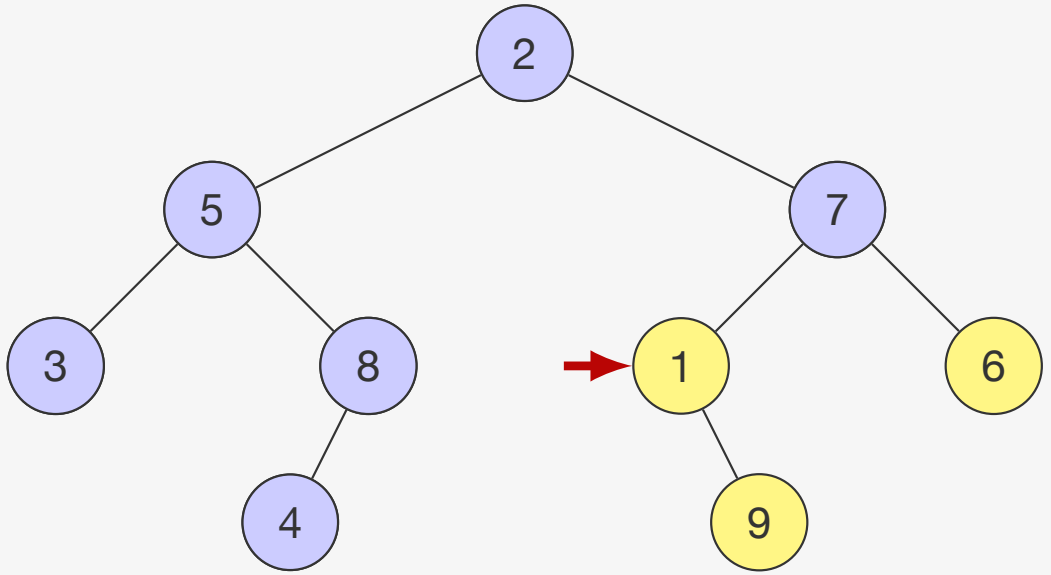


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

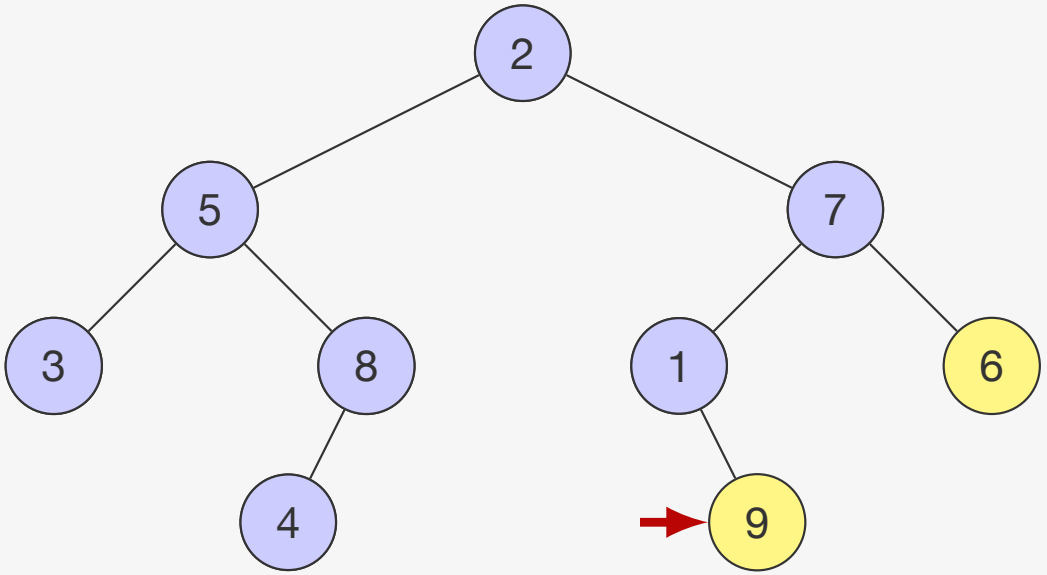


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

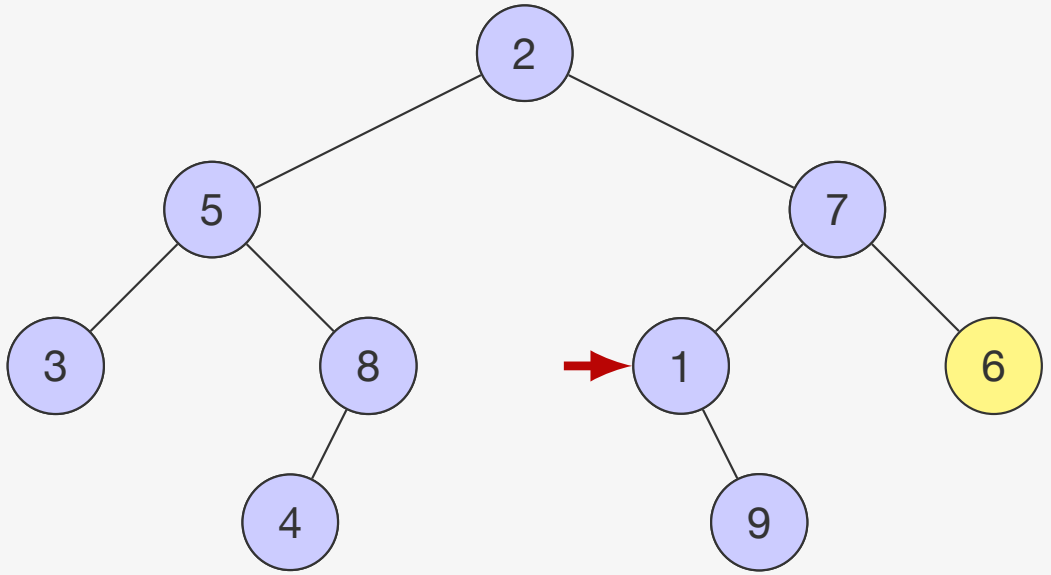


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

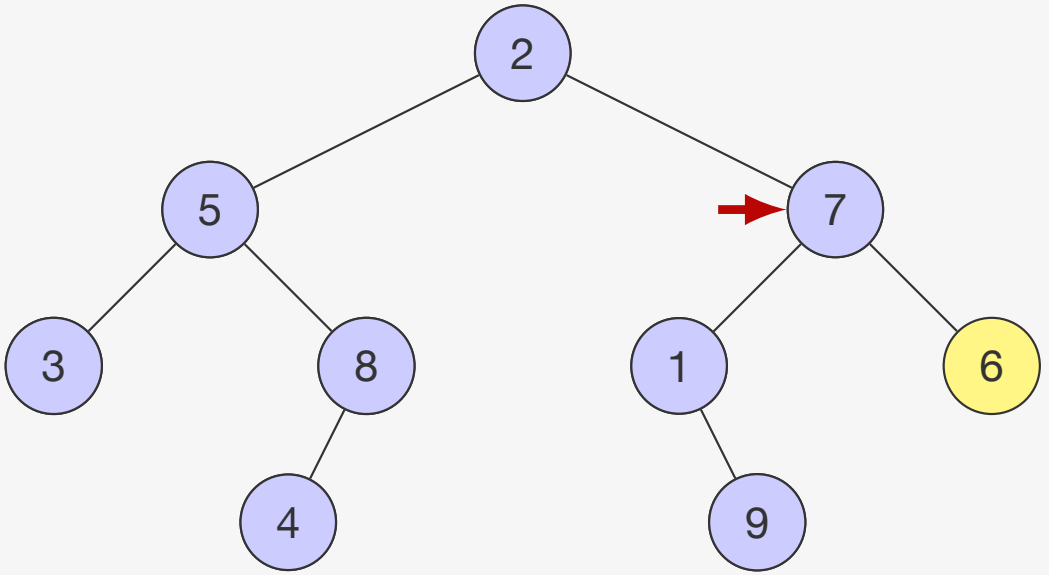


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

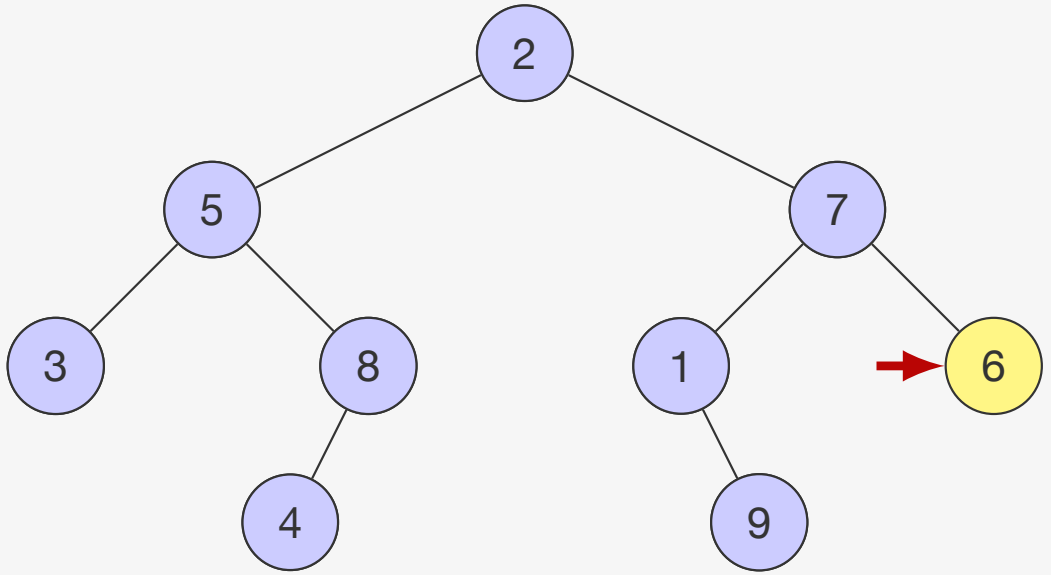


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

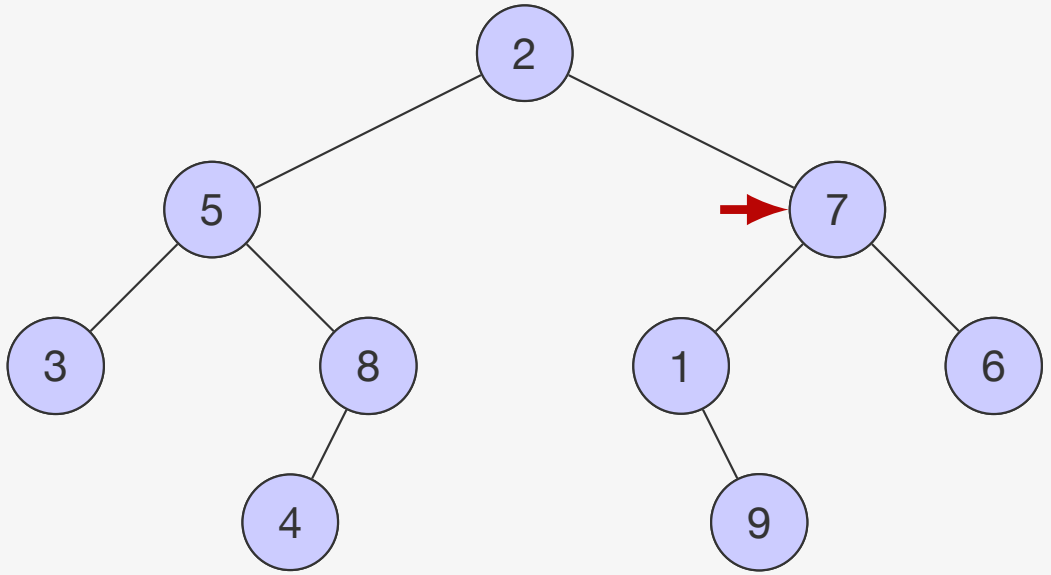


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

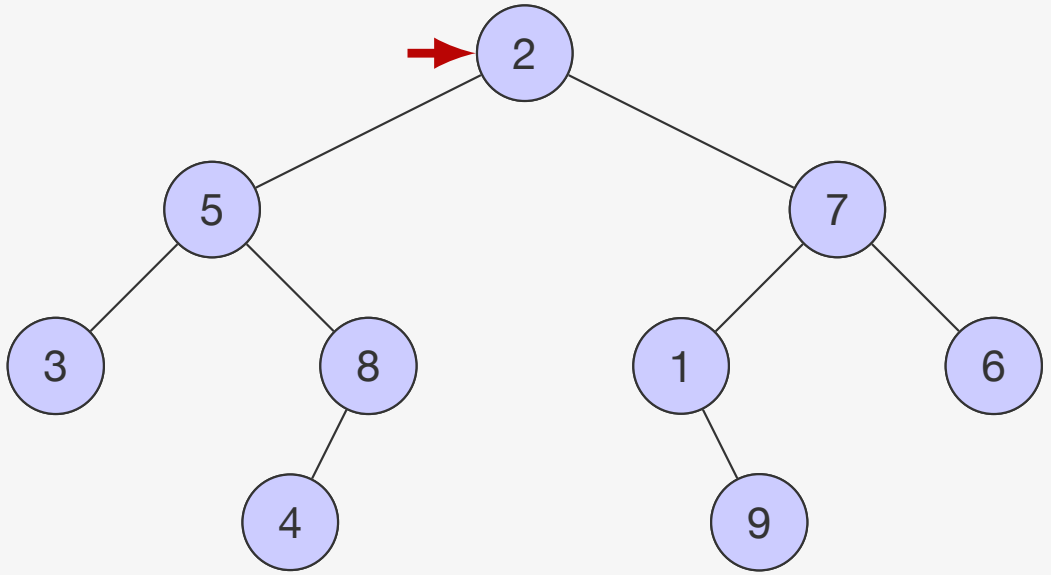


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita



Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

Percorrendo os nós - Pós-ordem

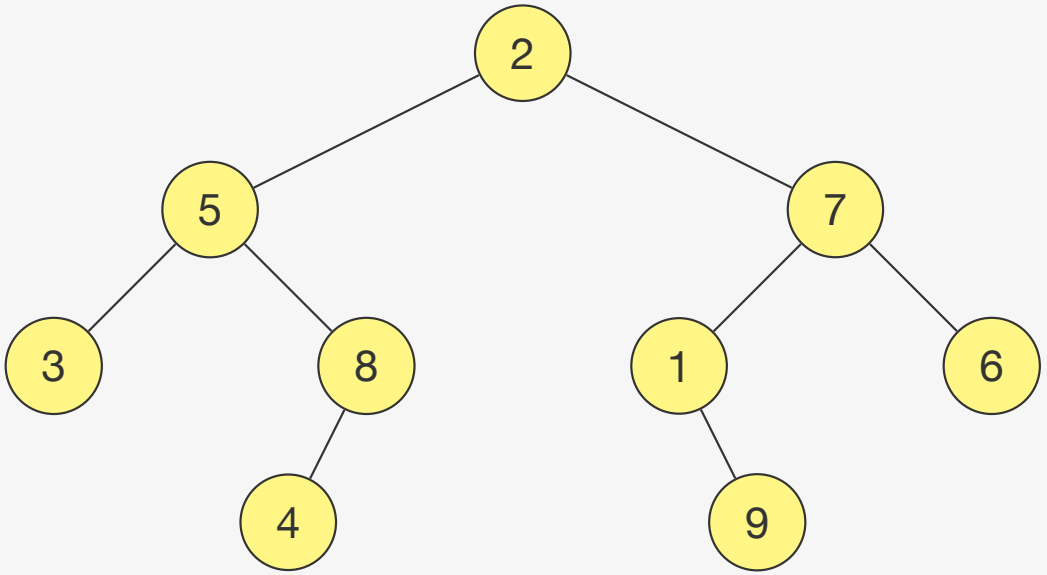
A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

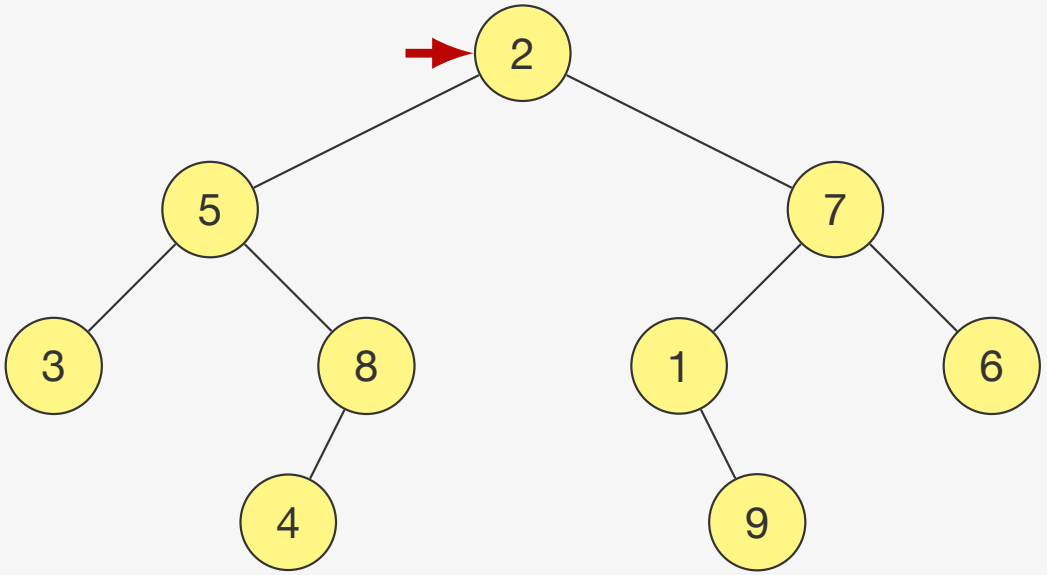


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

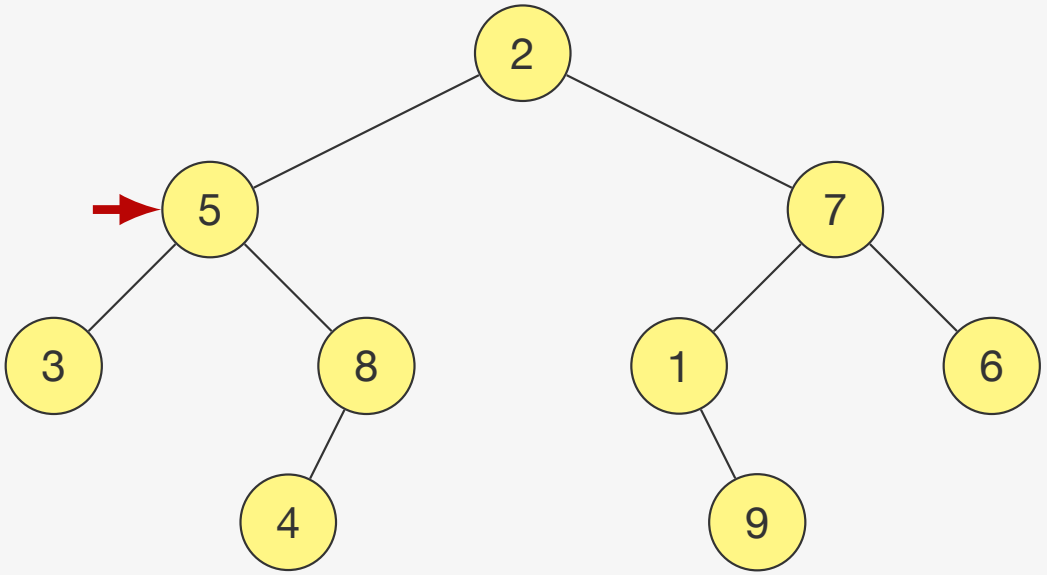


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

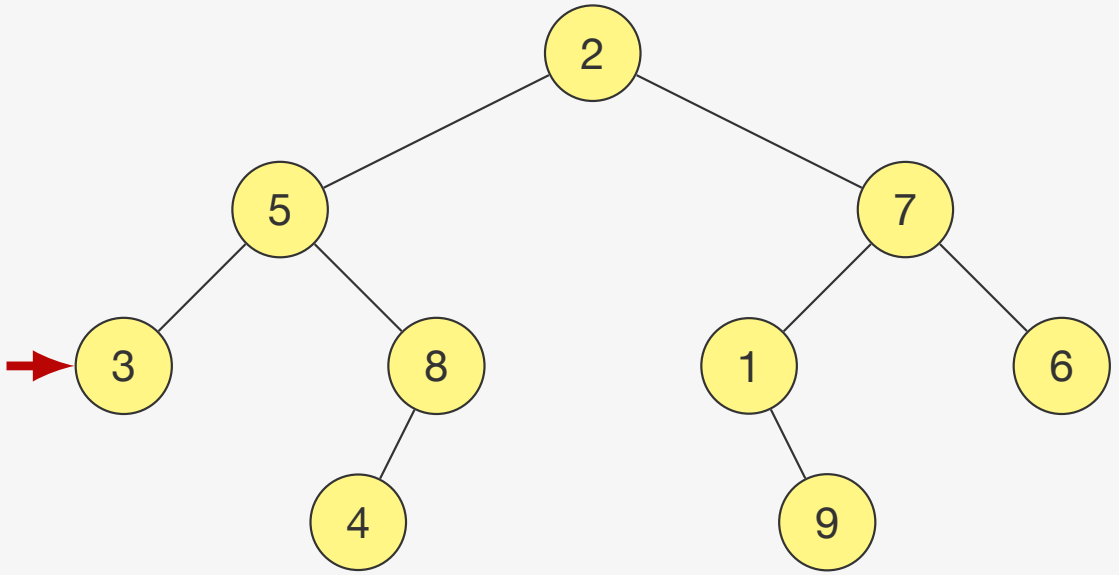


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

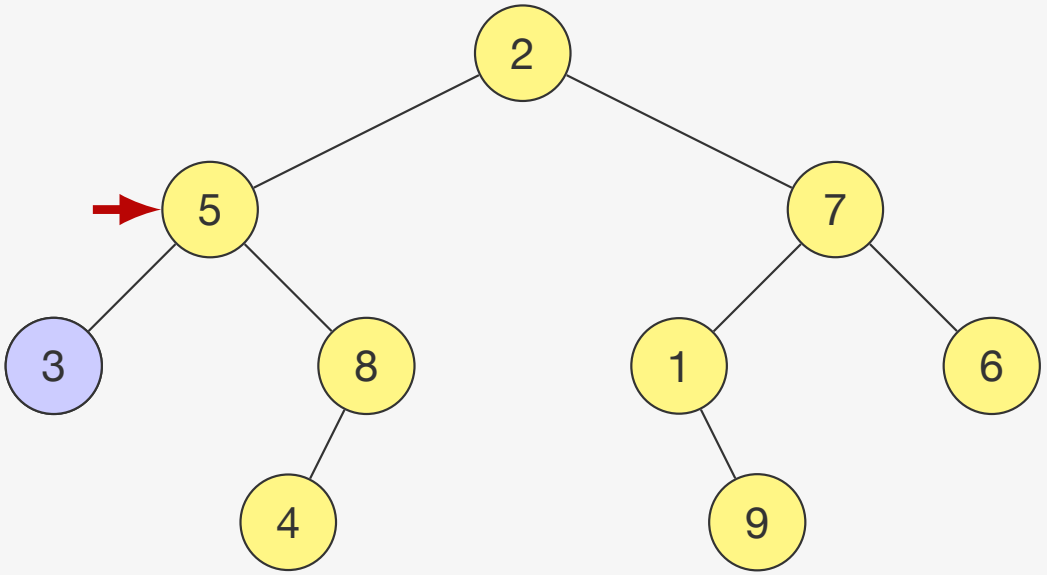


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

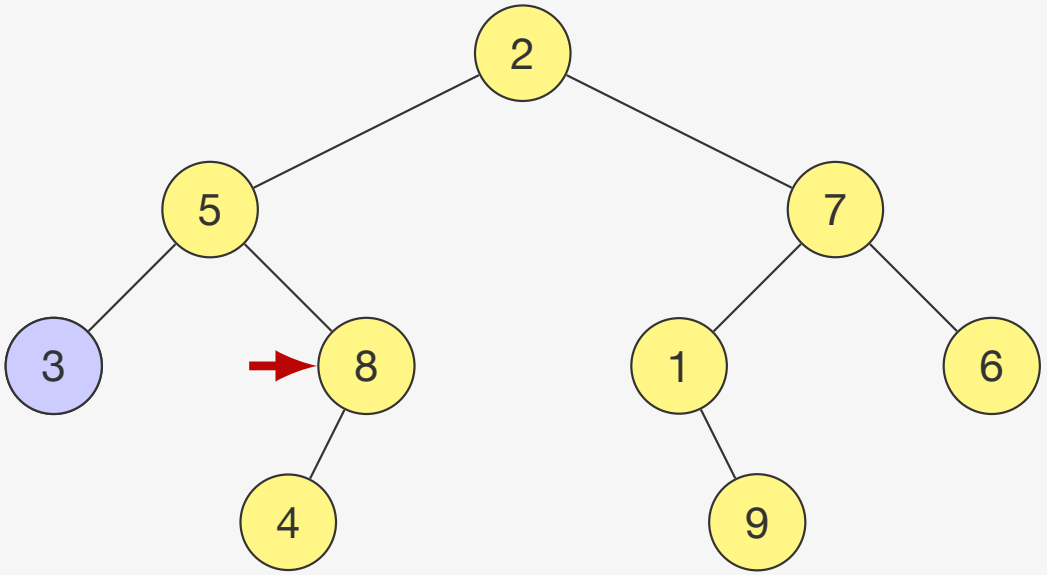


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

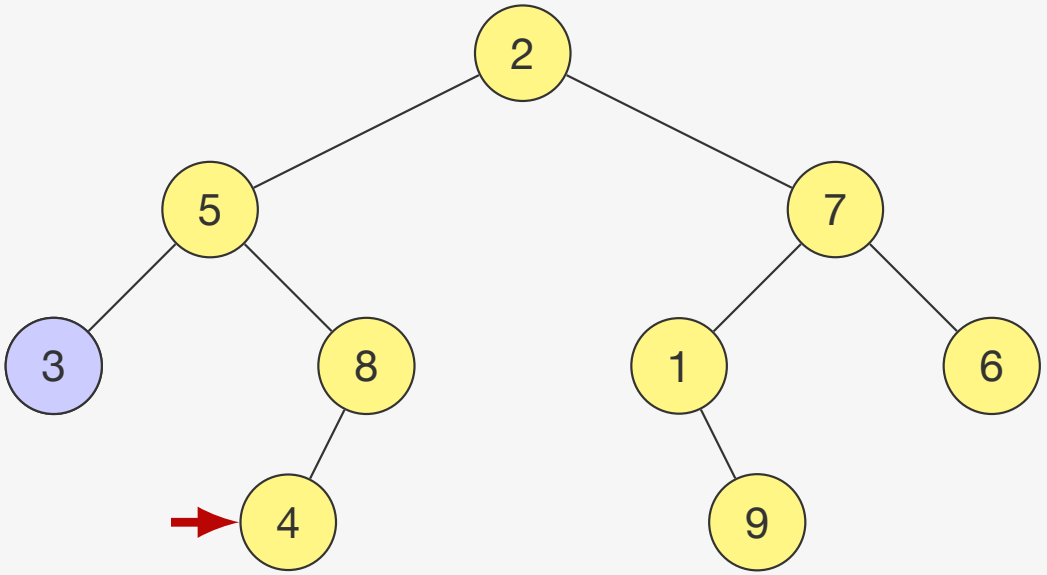


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

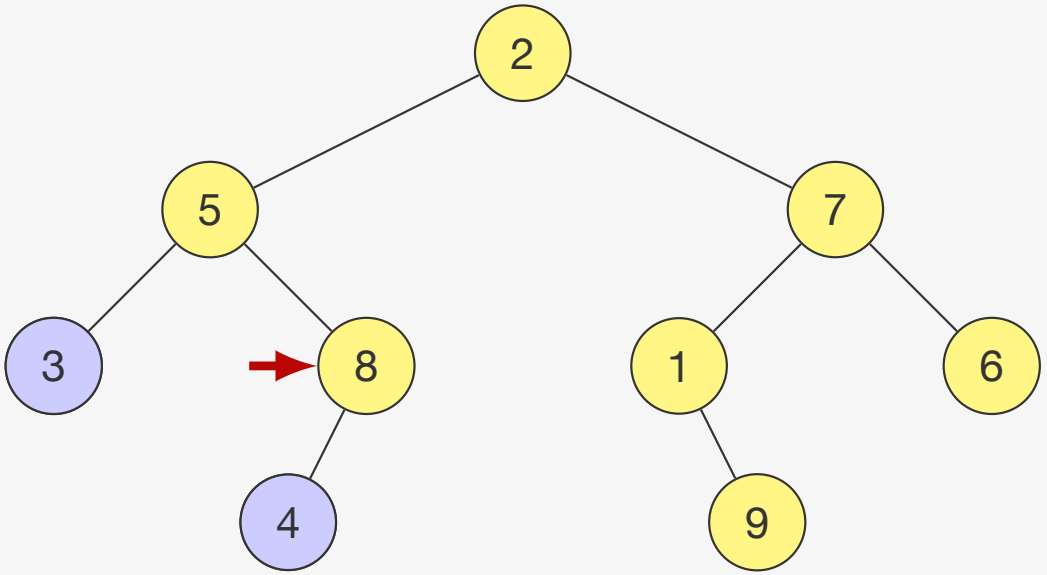


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

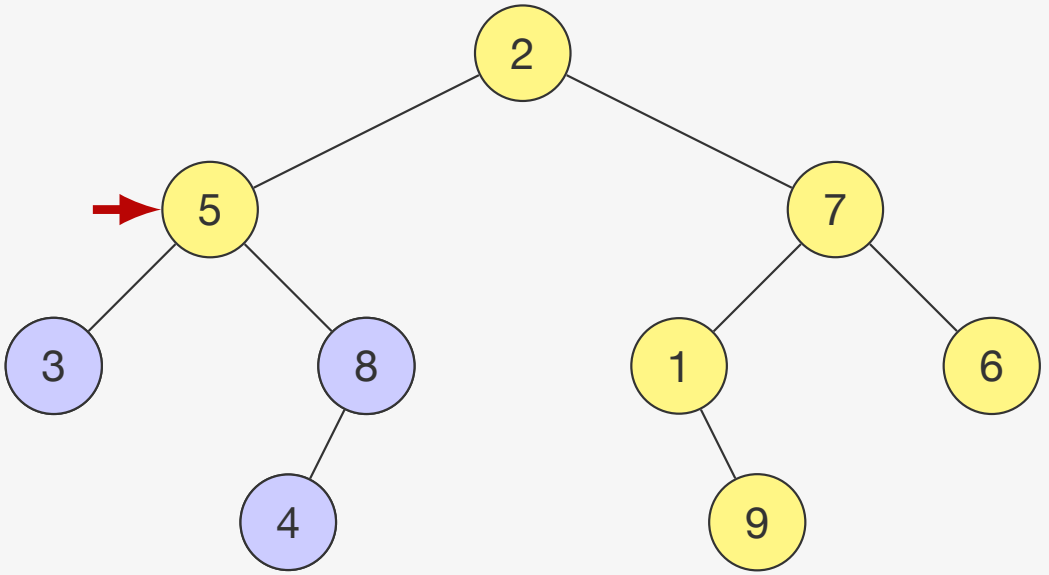


Ex: 3, 4,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

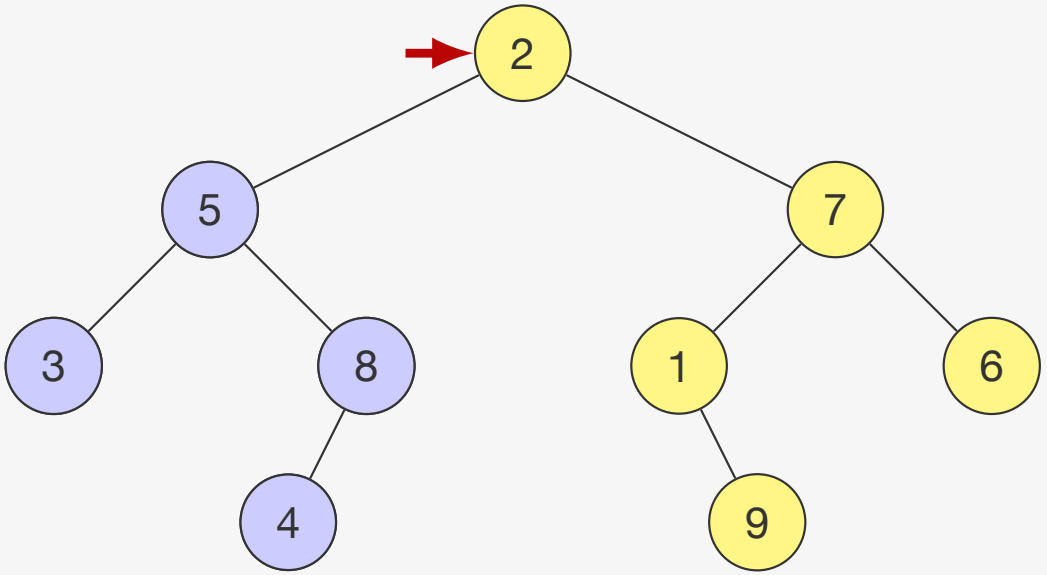


Ex: 3, 4, 8,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

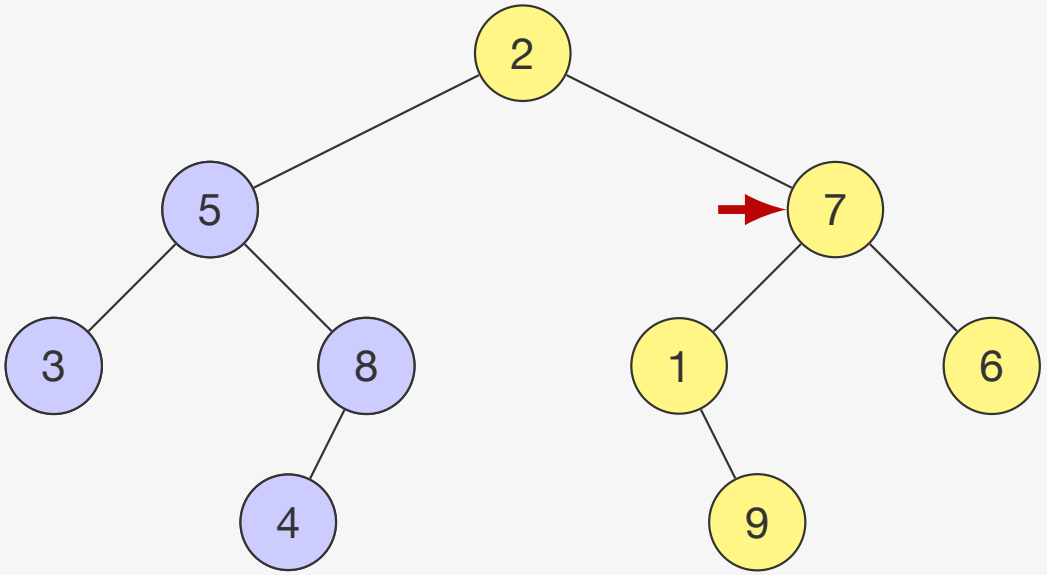


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

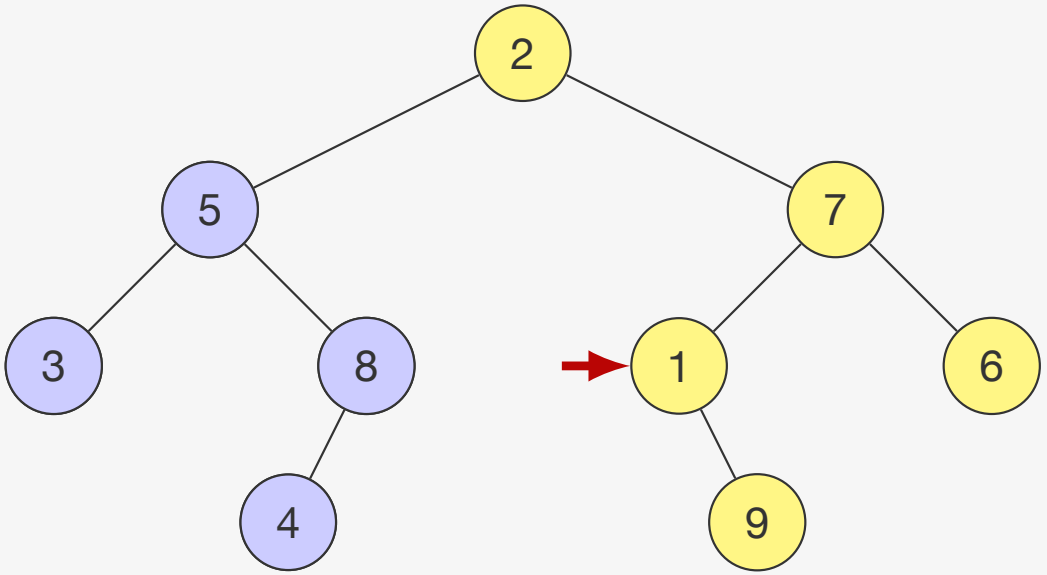


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

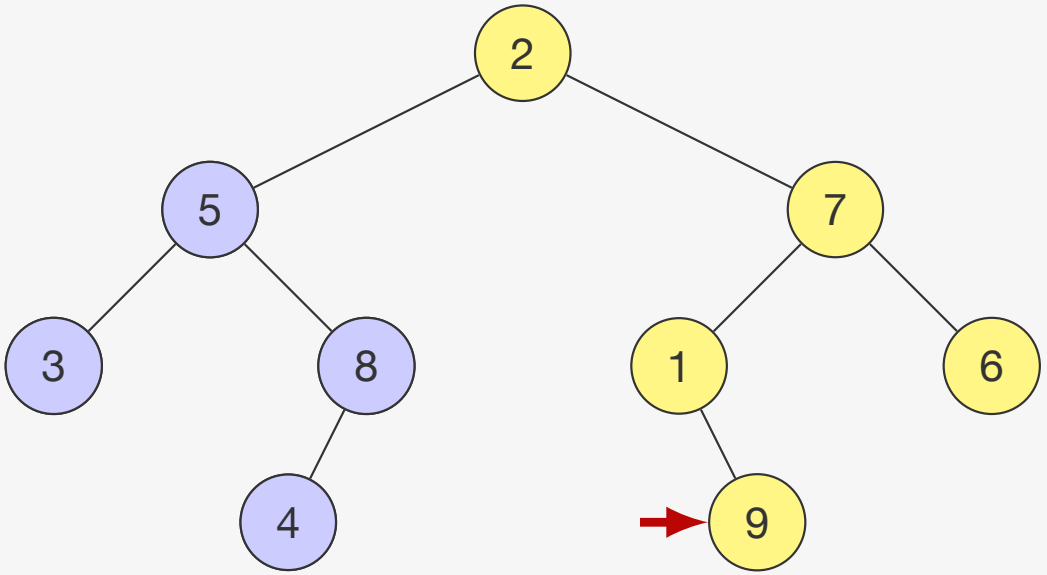


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

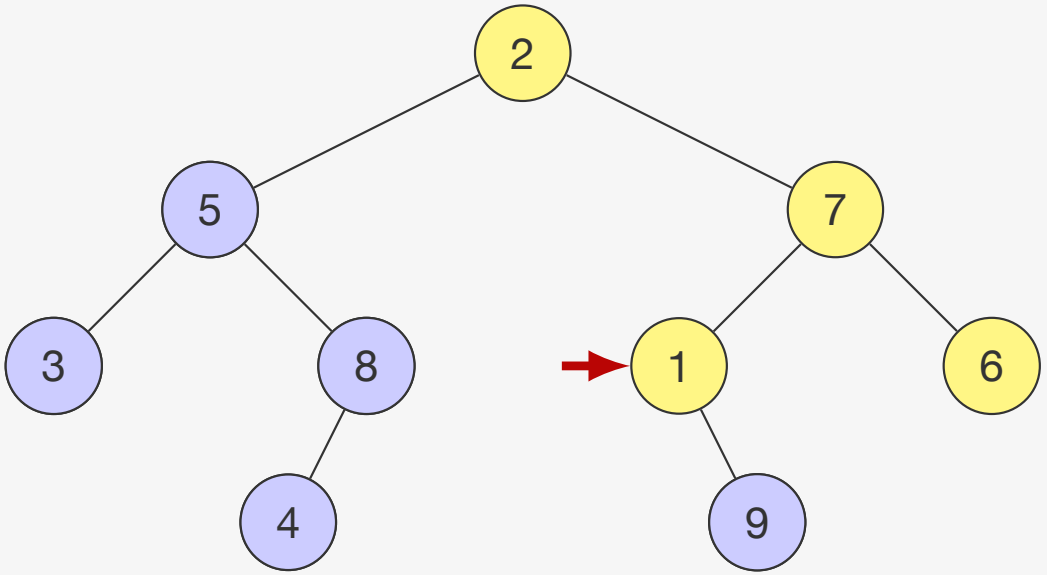


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

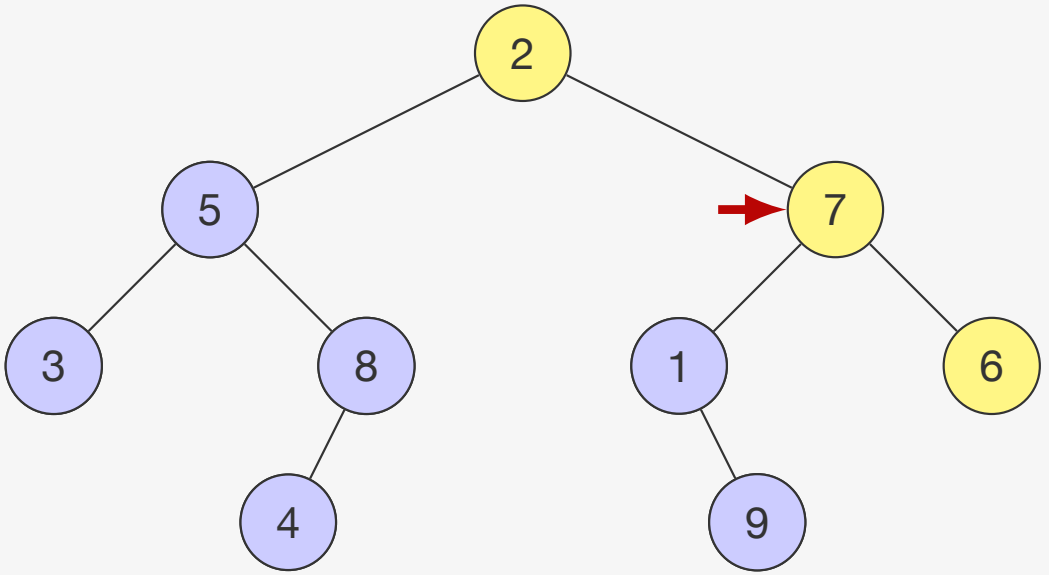


Ex: 3, 4, 8, 5, 9,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

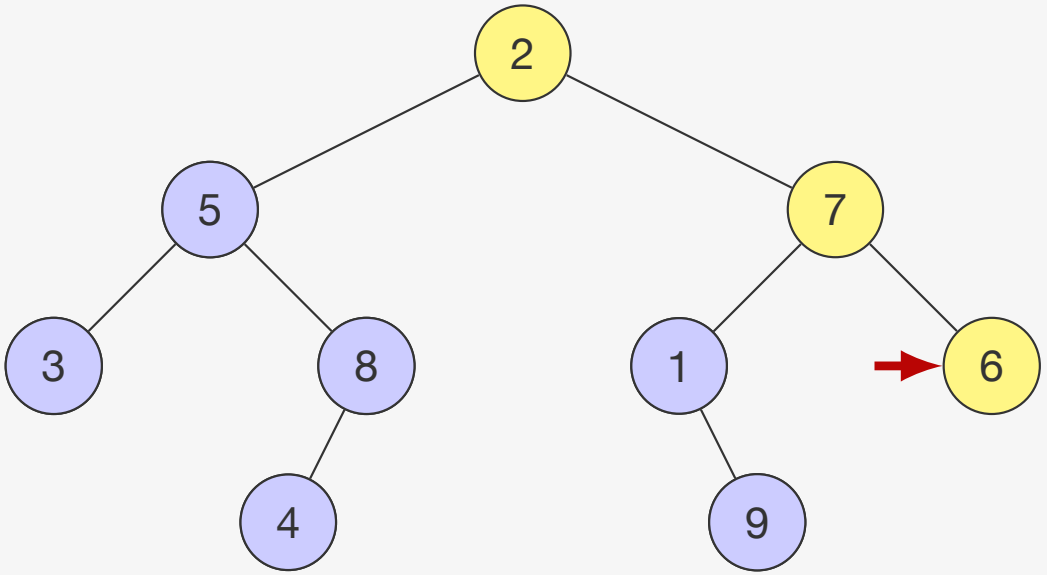


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

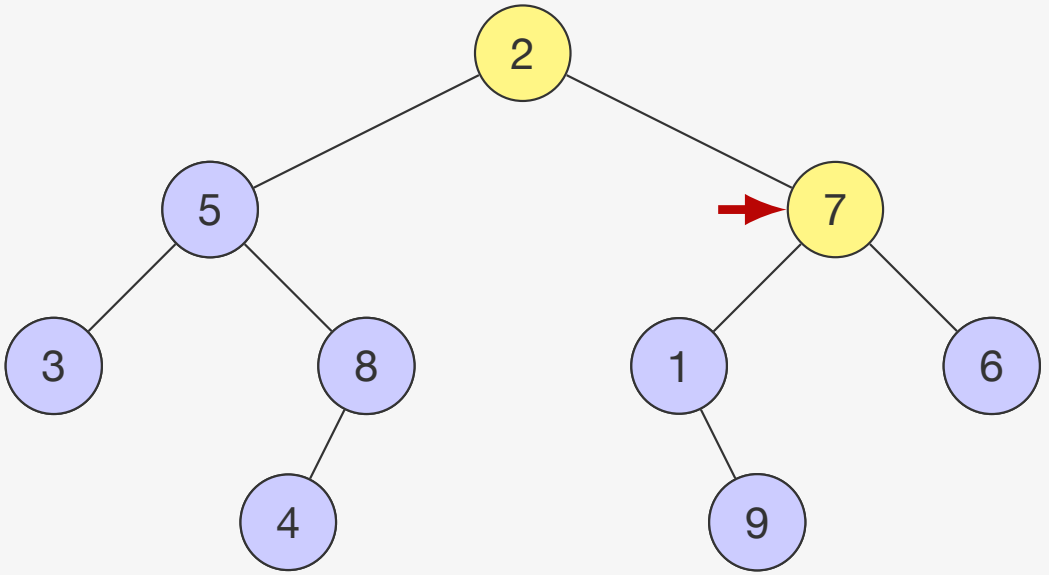


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

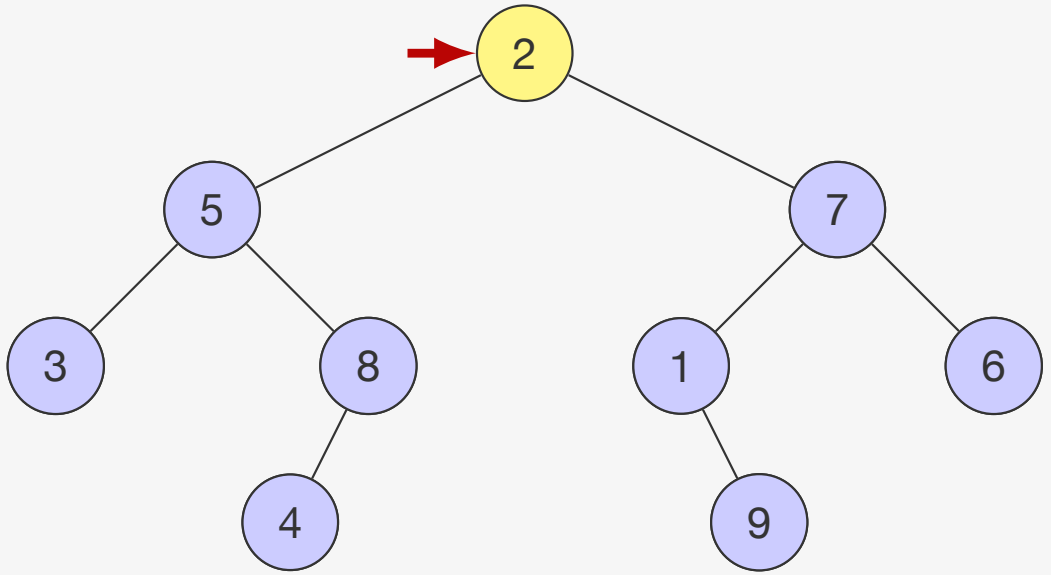


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

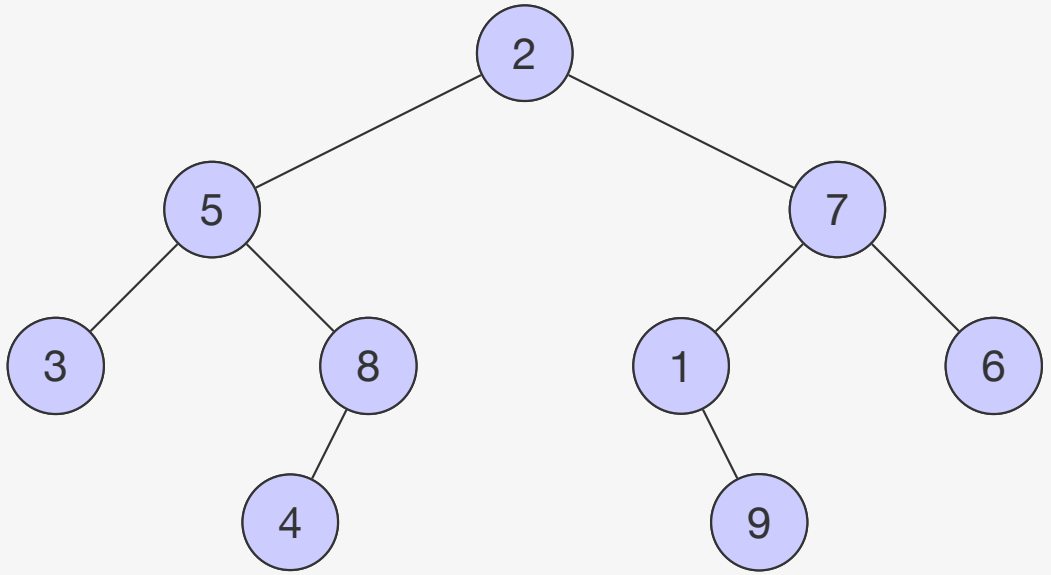


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz



Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7, 2

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz

Percorrendo os nós - Inordem

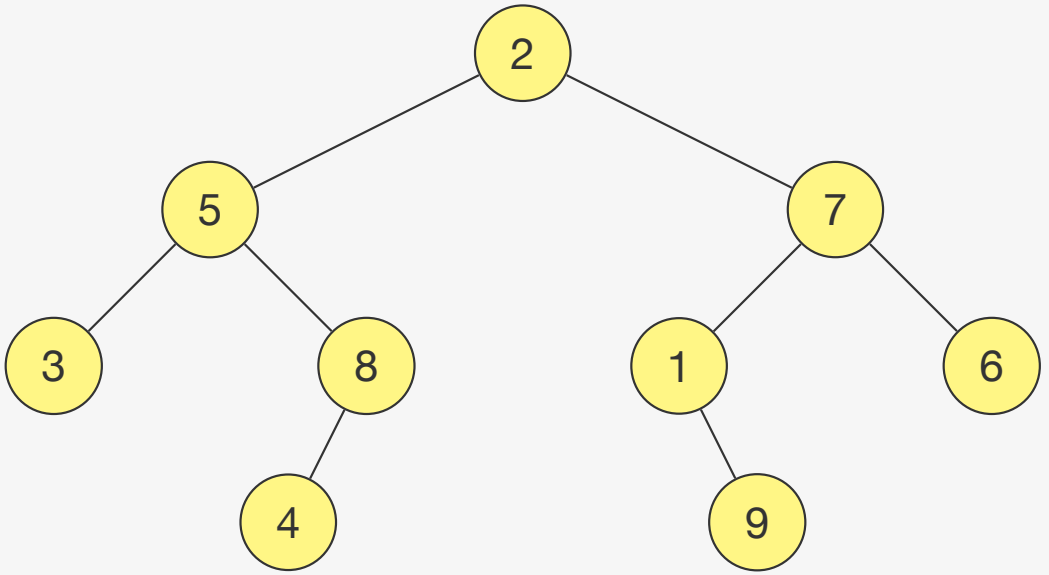
A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

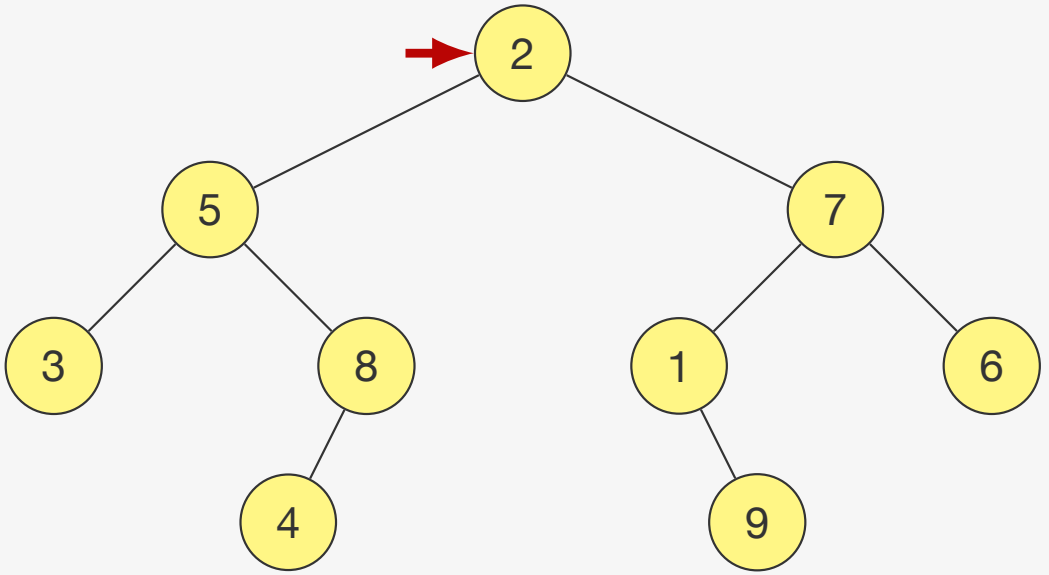


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

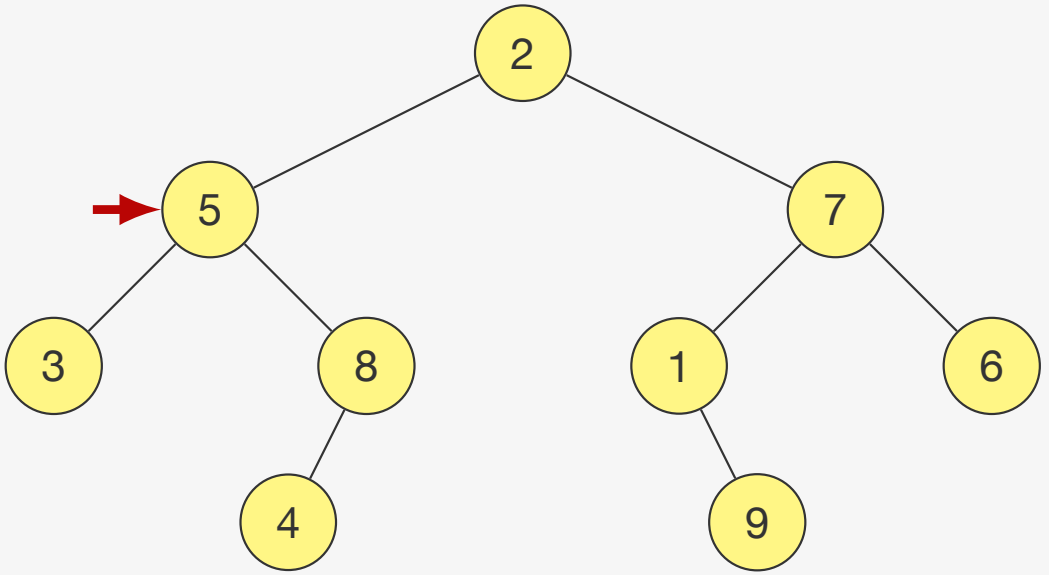


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

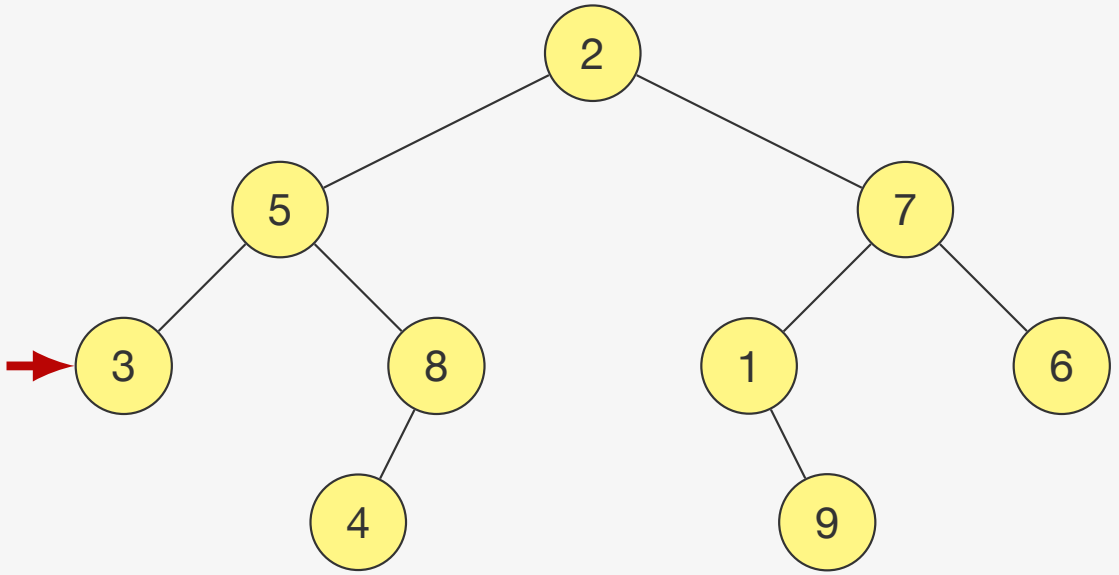


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

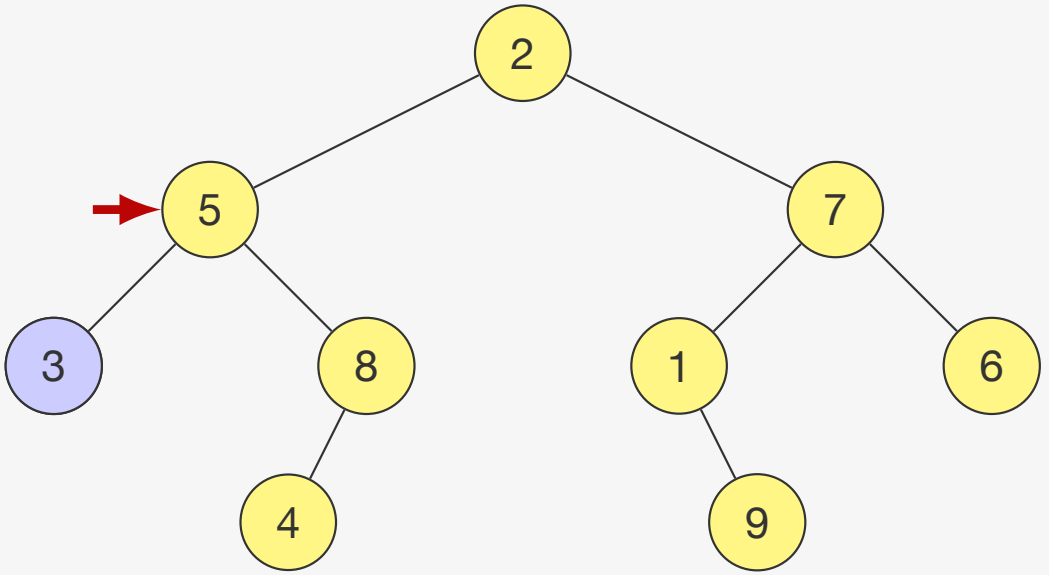


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

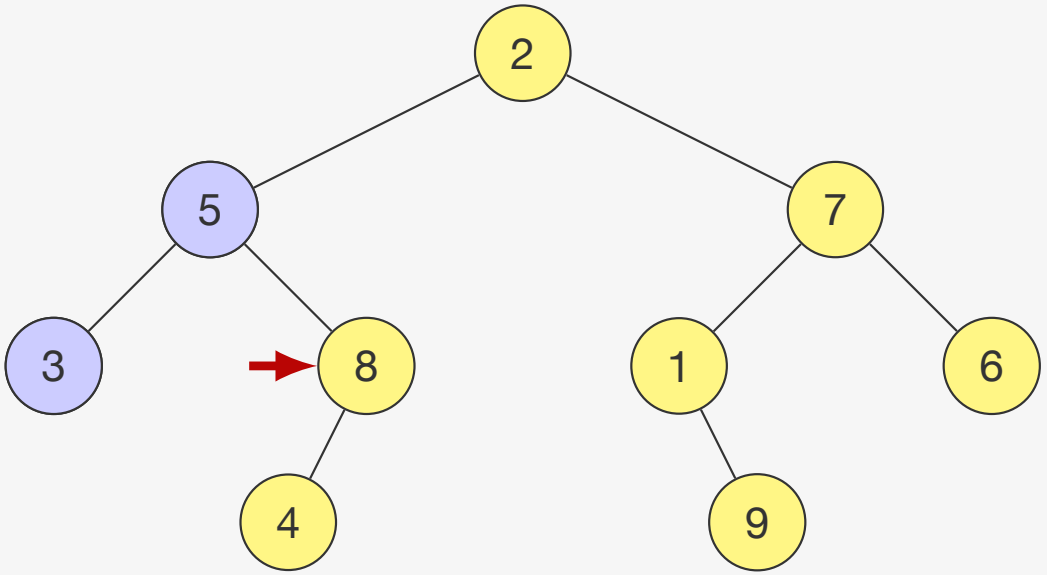


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

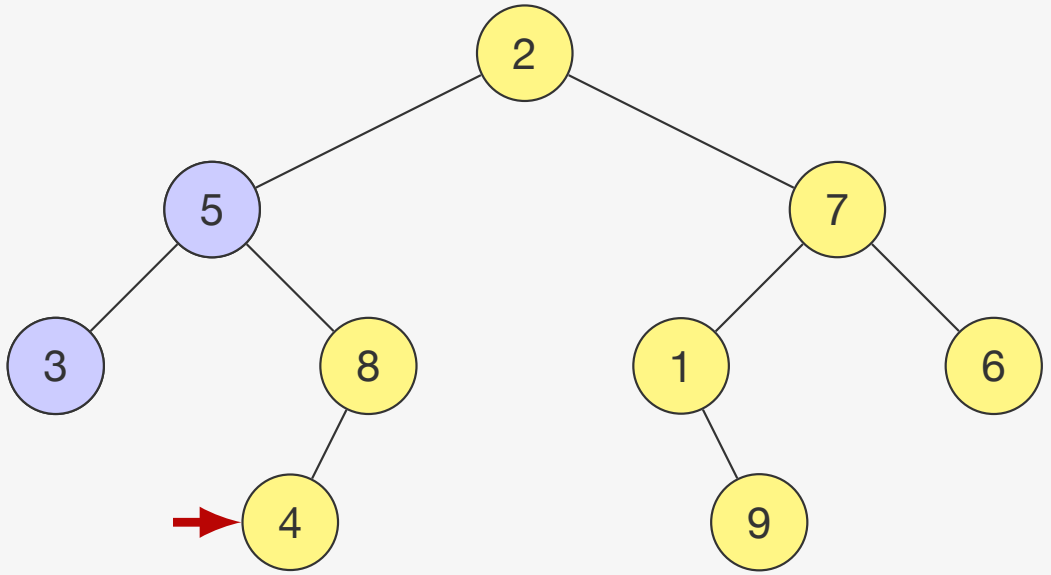


Ex: 3, 5,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

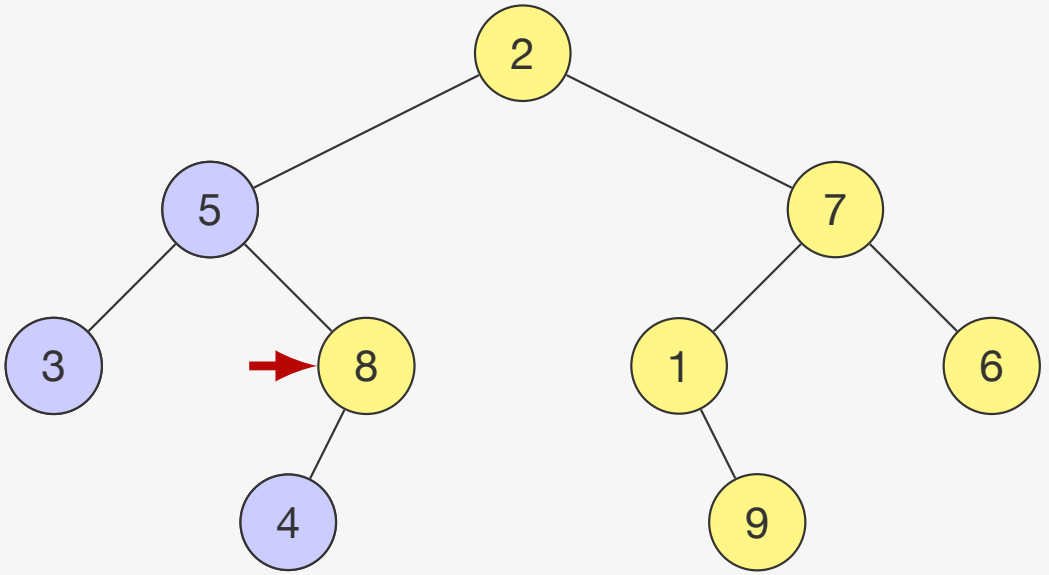


Ex: 3, 5,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

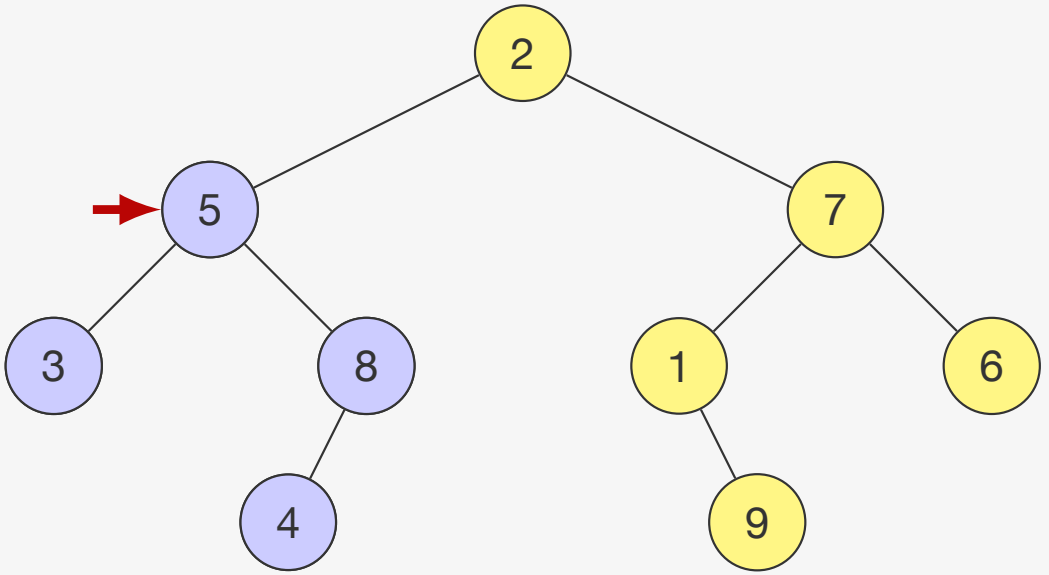


Ex: 3, 5, 4,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

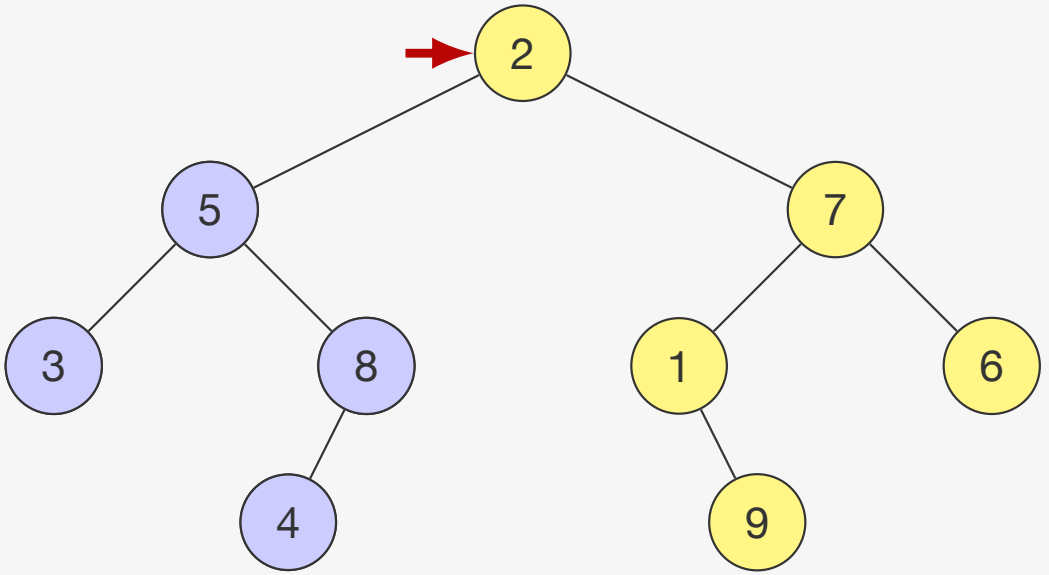


Ex: 3, 5, 4, 8,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

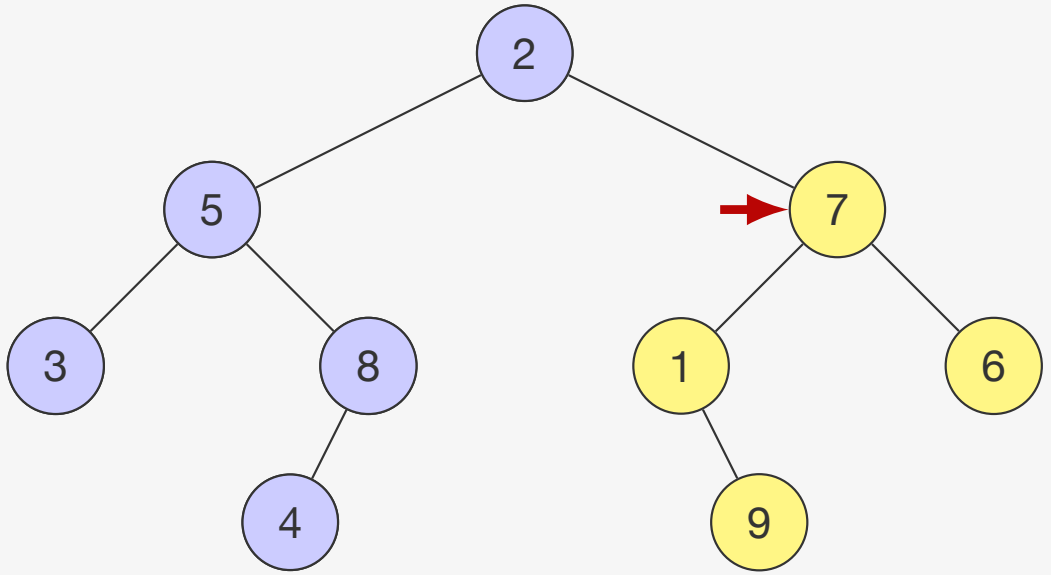


Ex: 3, 5, 4, 8,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

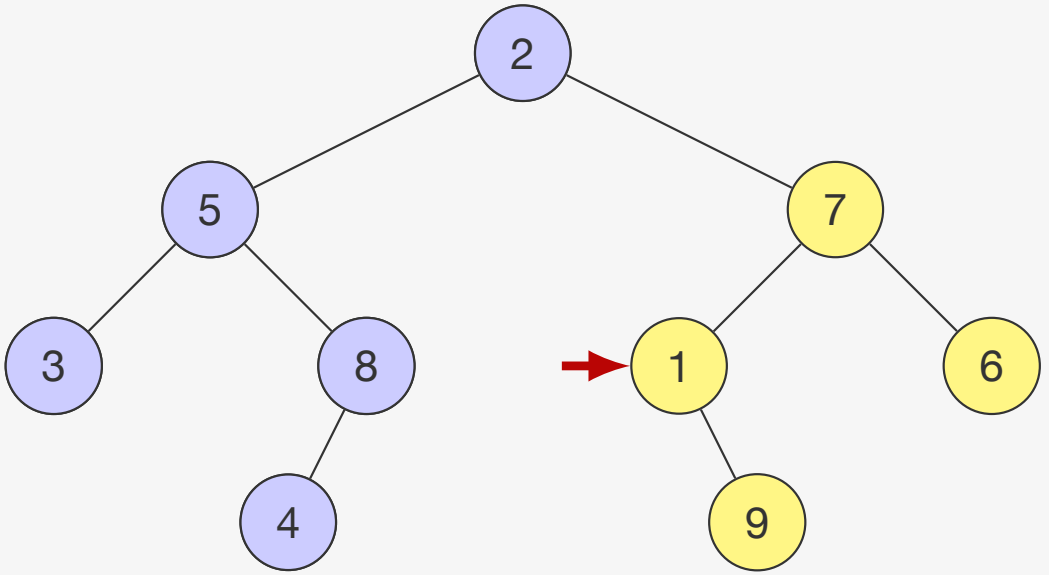


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

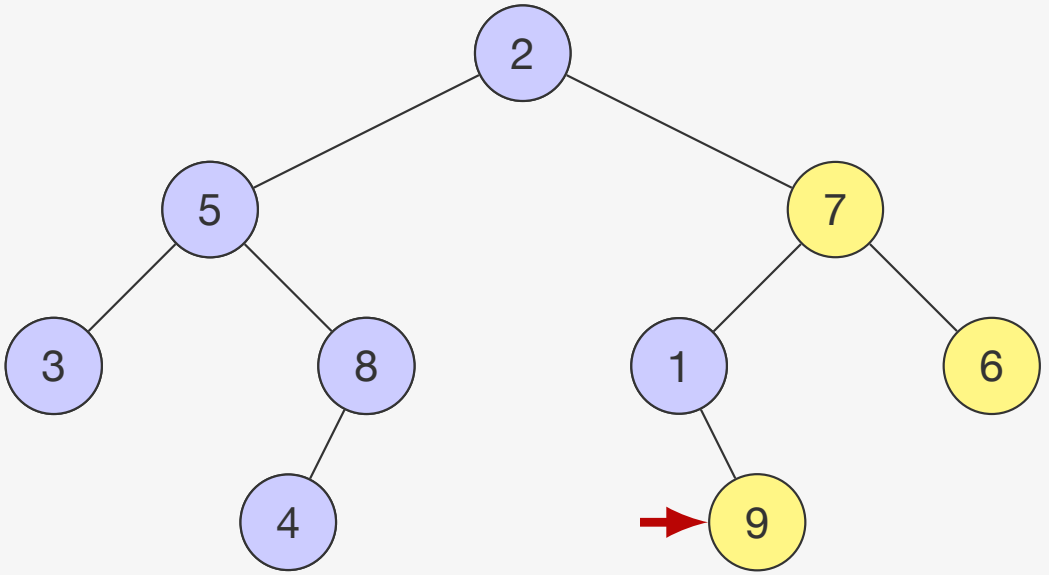


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

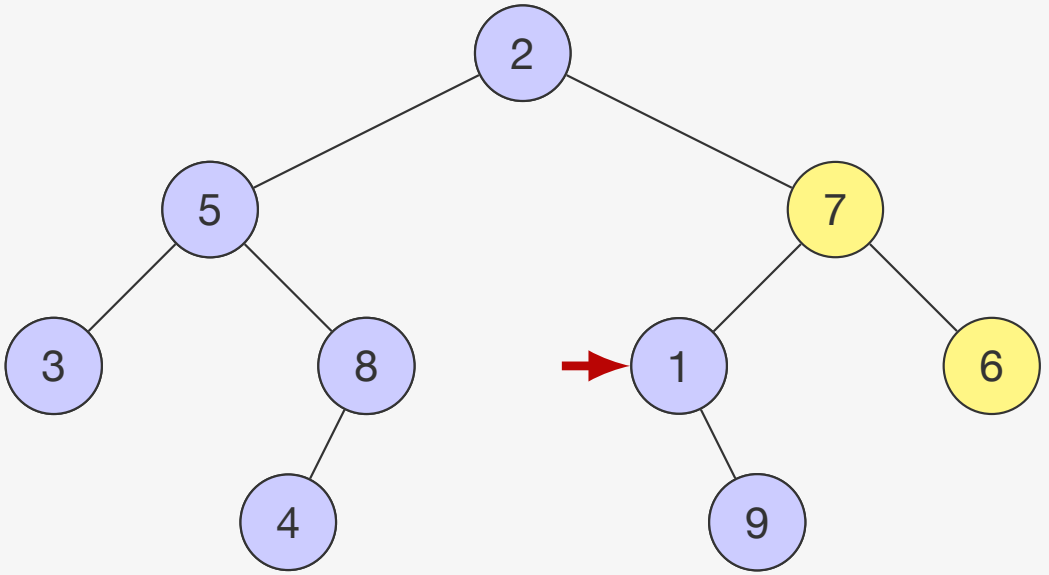


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

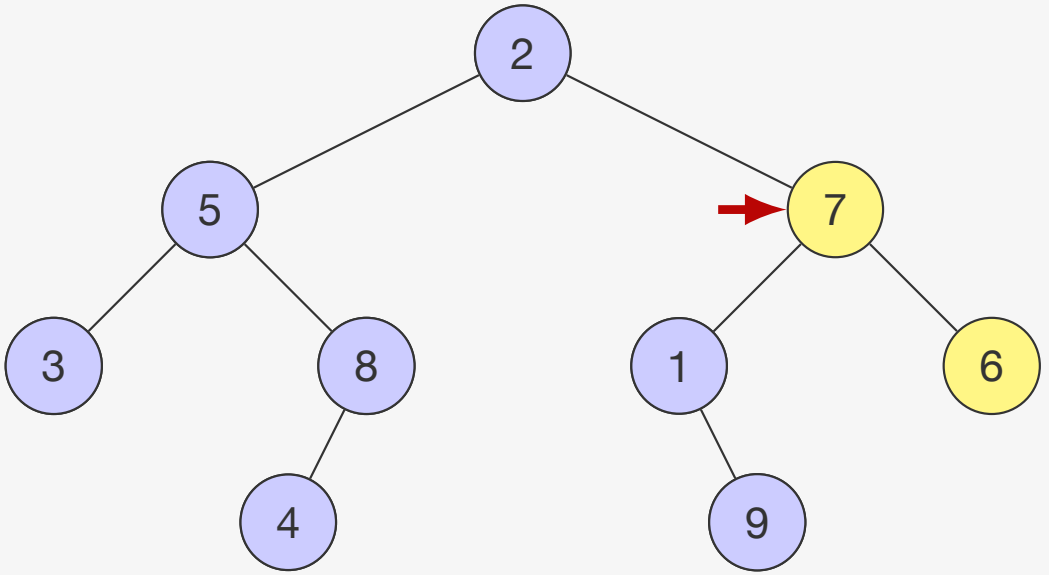


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

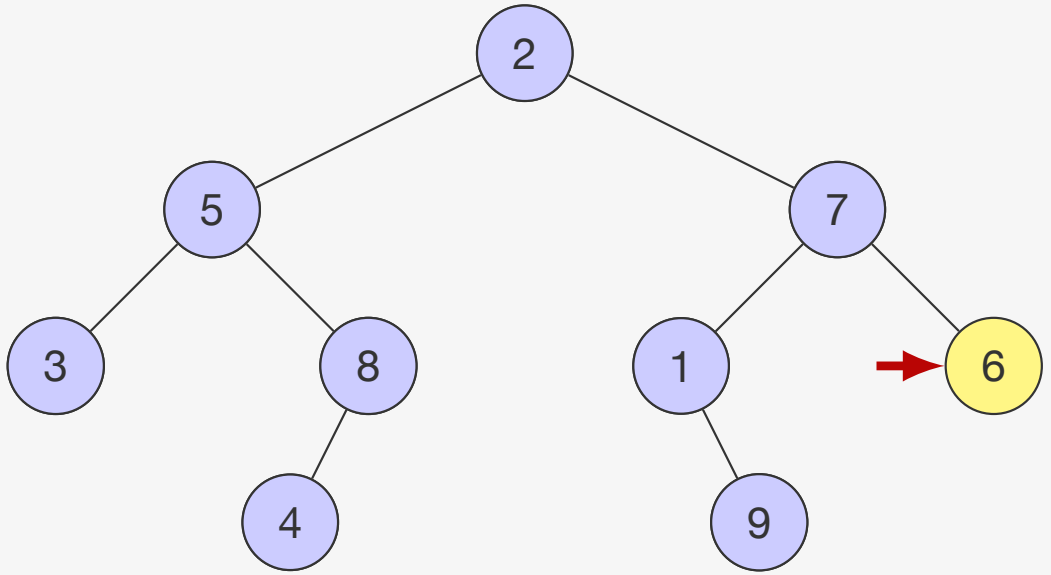


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

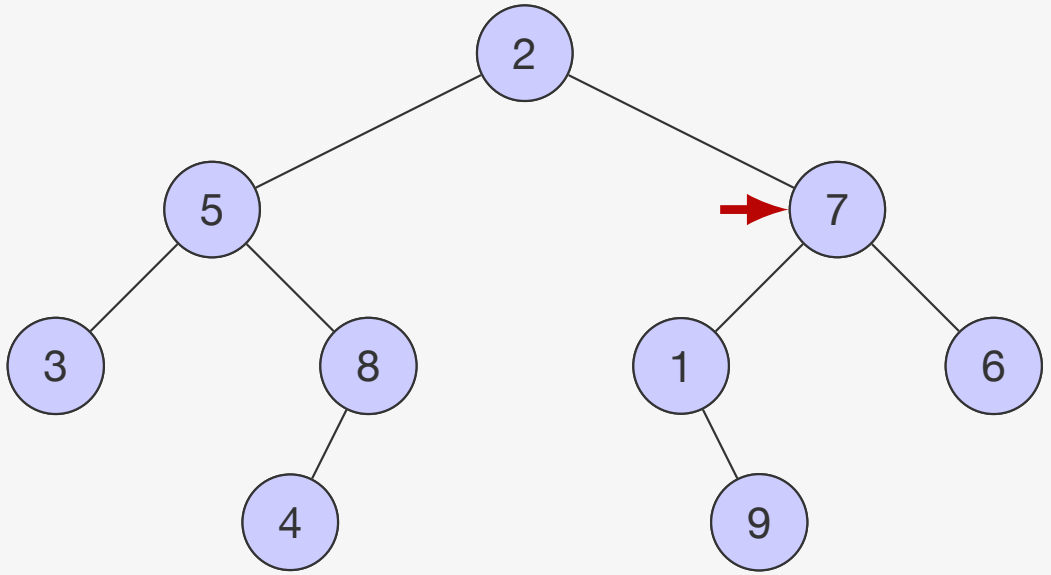


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

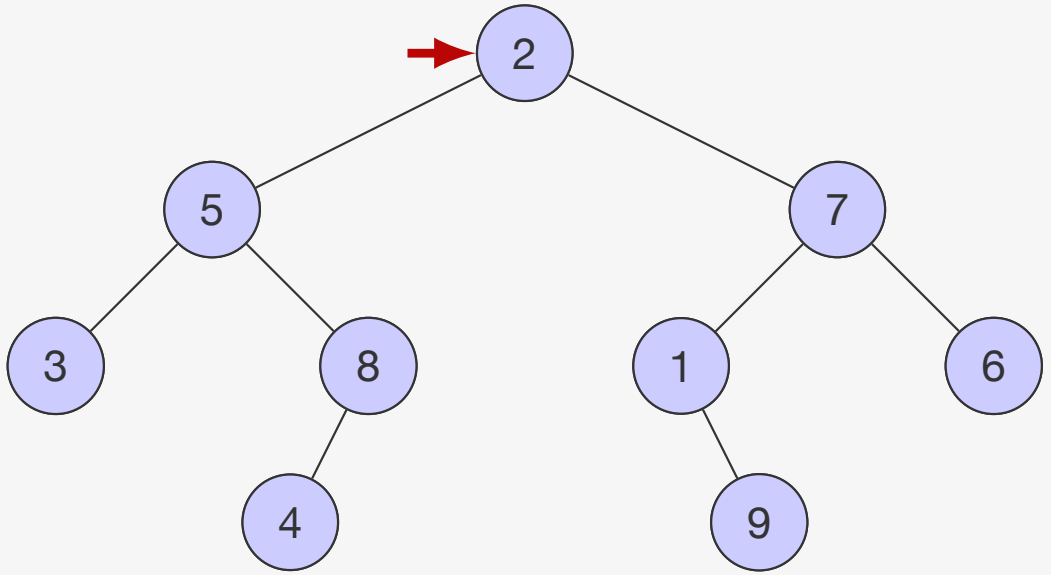


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percorrendo os nós - Inordem

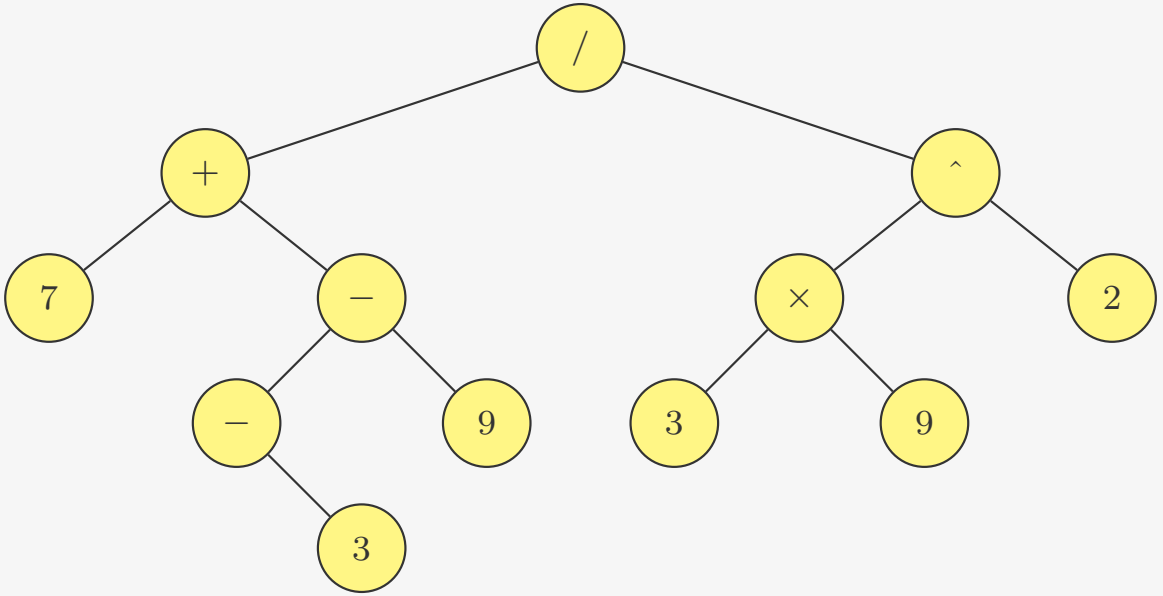
A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percurso em profundidade e expressões



Notação

- Pré-fixa: / + 7 - - 3 9 ^ × 3 9 2
- Pós-fixa: 7 3 - 9 - + 3 9 × 2 ^ /
- Infixa: 7 + - 3 - 9 / 3 × 9 ^ 2

Implementação de percurso em profundidade

```
1 void pre_ordem(No *arvore) {
2   if (arvore) {
3     printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
4     pre_ordem(arvore->esq);
5     pre_ordem(arvore->dir);
6   }
7 }
```

Implementação de percurso em profundidade

```c
void pre_ordem(No *arvore) {
  if (arvore) {
    printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
    pre_ordem(arvore->esq);
    pre_ordem(arvore->dir);
  }
}
```

```c
void pos_ordem(No *arvore) {
  if (arvore) {
    pos_ordem(arvore->esq);
    pos_ordem(arvore->dir);
    printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
  }
}
```

Implementação de percurso em profundidade

```c
void pre_ordem(No *arvore) {
  if (arvore) {
    printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
    pre_ordem(arvore->esq);
    pre_ordem(arvore->dir);
  }
}
```

```c
void pos_ordem(No *arvore) {
  if (arvore) {
    pos_ordem(arvore->esq);
    pos_ordem(arvore->dir);
    printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
  }
}
```

```c
void inordem(No *arvore) {
  if (arvore) {
    inordem(arvore->esq);
    printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
    inordem(arvore->dir);
  }
}
```

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1  void pre_ordem(No *arvore) {
2    Pilha *p; /* pilha de No * */
3    iniciar_pilha(&p);
4    empilhar(&p, arvore);
5    while(!pilha_vazia(p)) {
6      arvore = desempilhar(&p);
7      if (arvore) {
8        empilhar(&p, arvore->dir);
9        empilhar(&p, arvore->esq);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_pilha(&p);
14 }
```

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1  void pre_ordem(No *arvore) {
2    Pilha *p; /* pilha de No * */
3    iniciar_pilha(&p);
4    empilhar(&p, arvore);
5    while(!pilha_vazia(p)) {
6      arvore = desempilhar(&p);
7      if (arvore) {
8        empilhar(&p, arvore->dir);
9        empilhar(&p, arvore->esq);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_pilha(&p);
14 }
```

Por que empilhamos `arvore->dir` primeiro?

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1  void pre_ordem(No *arvore) {
2    Pilha *p; /* pilha de No * */
3    iniciar_pilha(&p);
4    empilhar(&p, arvore);
5    while(!pilha_vazia(p)) {
6      arvore = desempilhar(&p);
7      if (arvore) {
8        empilhar(&p, arvore->dir);
9        empilhar(&p, arvore->esq);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_pilha(&p);
14 }
```

Por que empilhamos `arvore->dir` primeiro?

- E se fosse o contrário?

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis

Percorrendo os nós - em largura

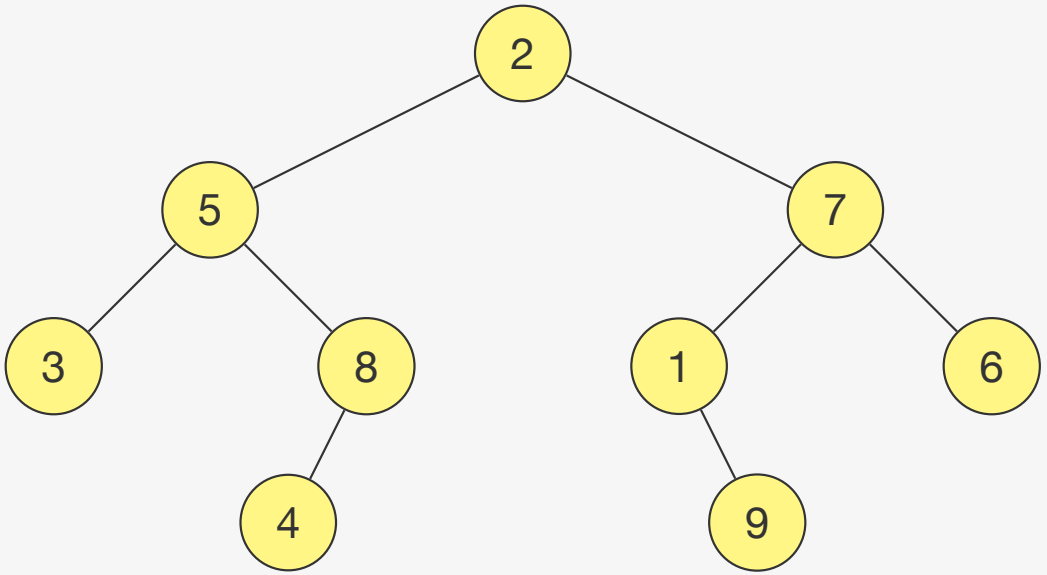
O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

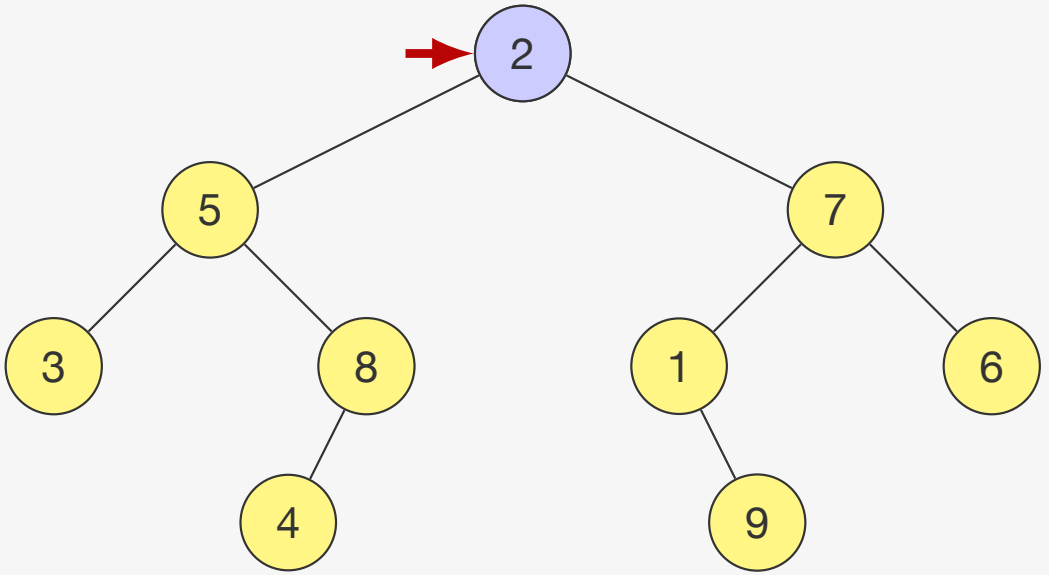


Ex:

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

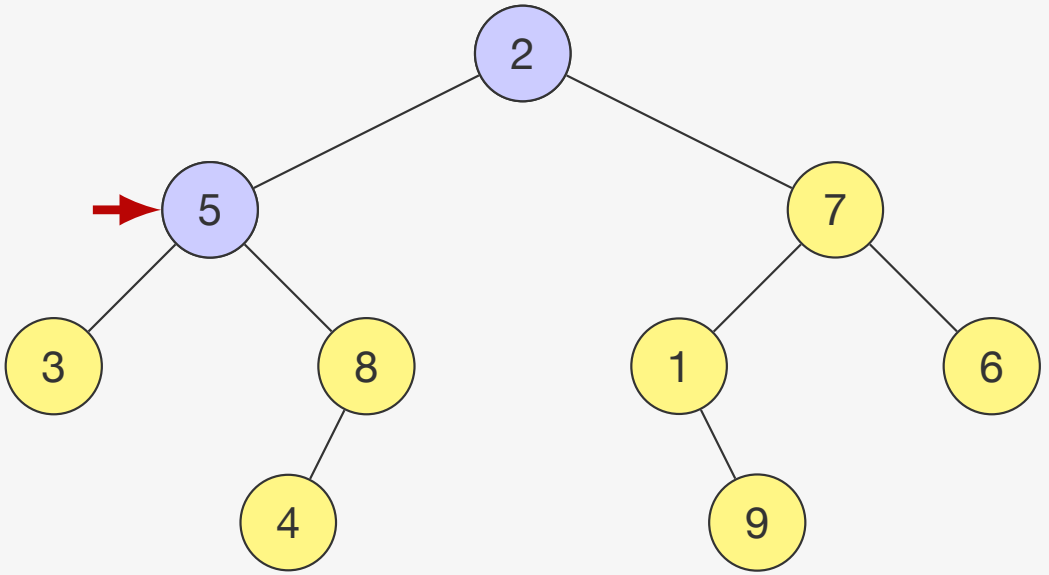


Ex: 2,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

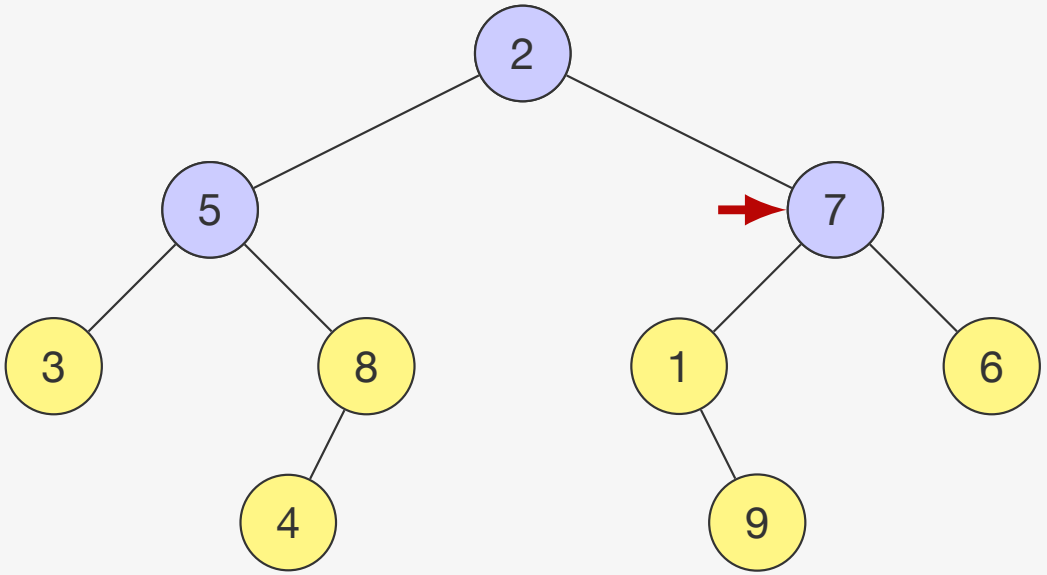


Ex: 2, 5,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

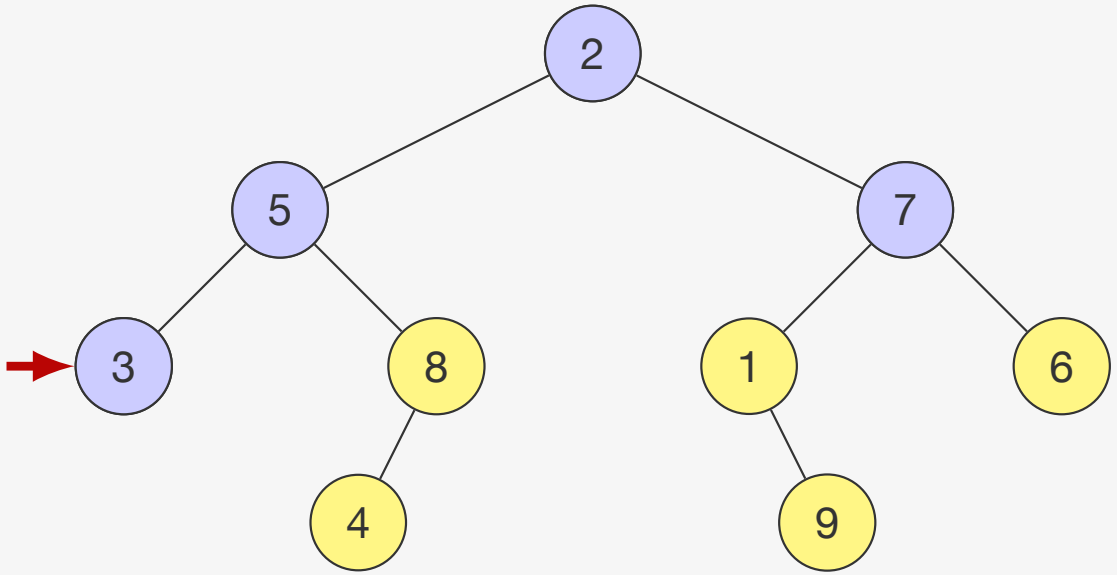


Ex: 2, 5, 7,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

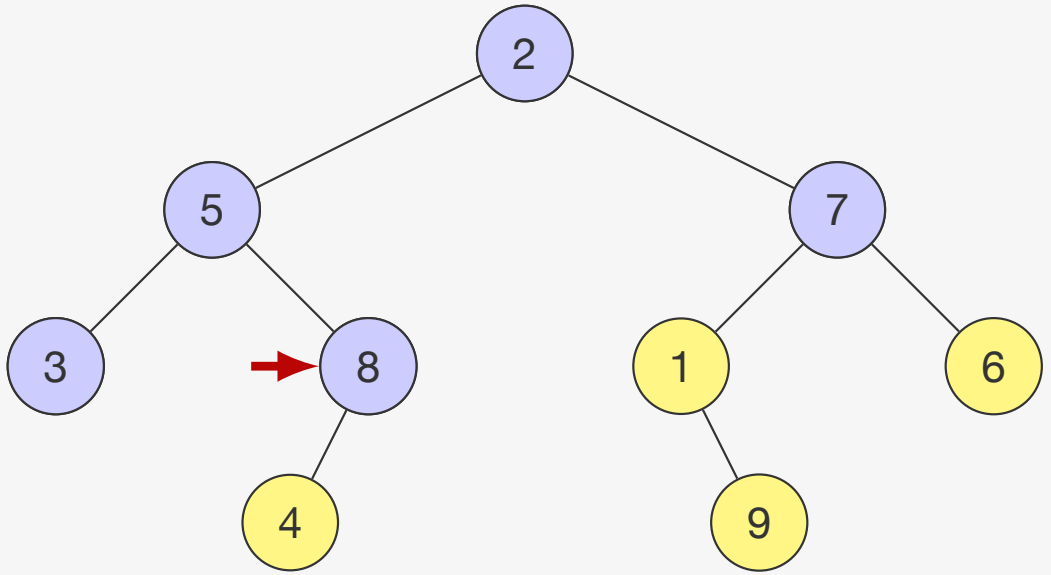


Ex: 2, 5, 7, 3,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

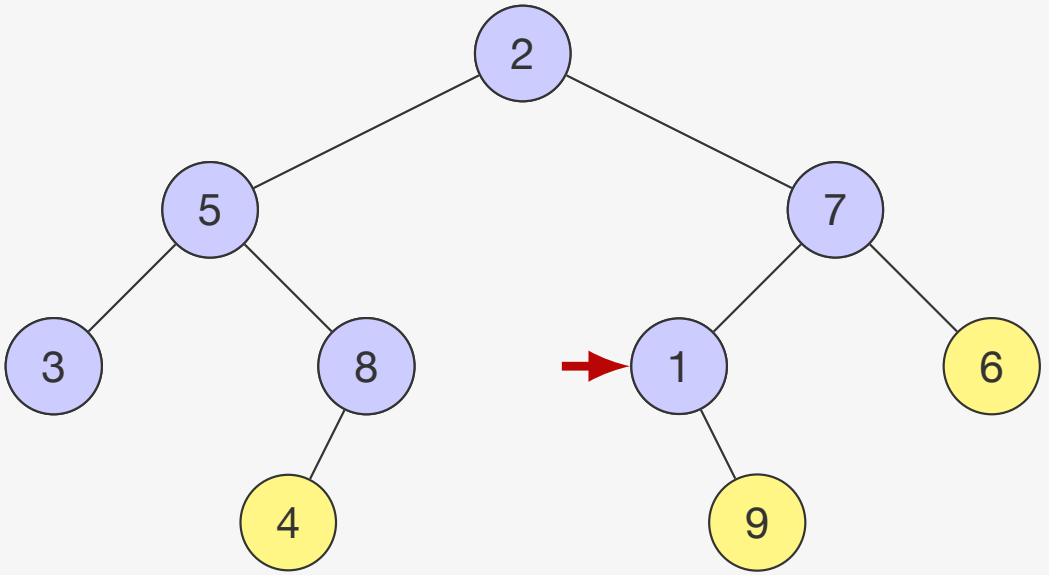


Ex: 2, 5, 7, 3, 8,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

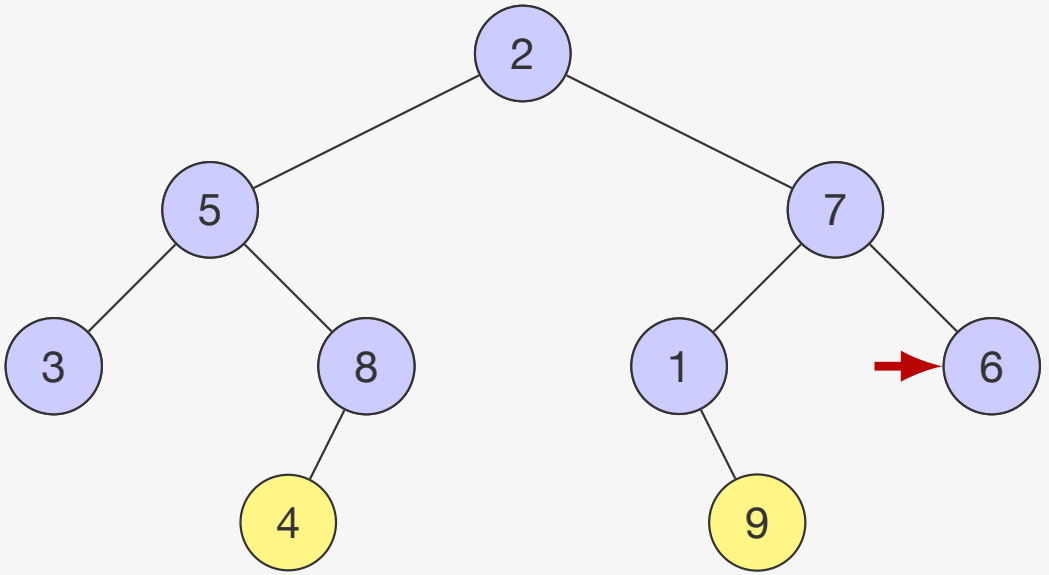


Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

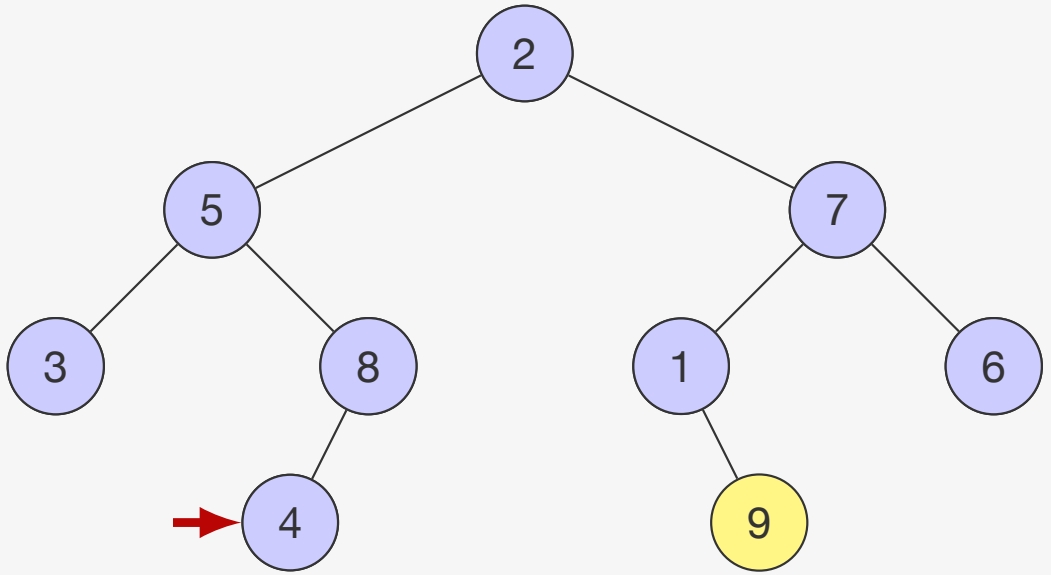


Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

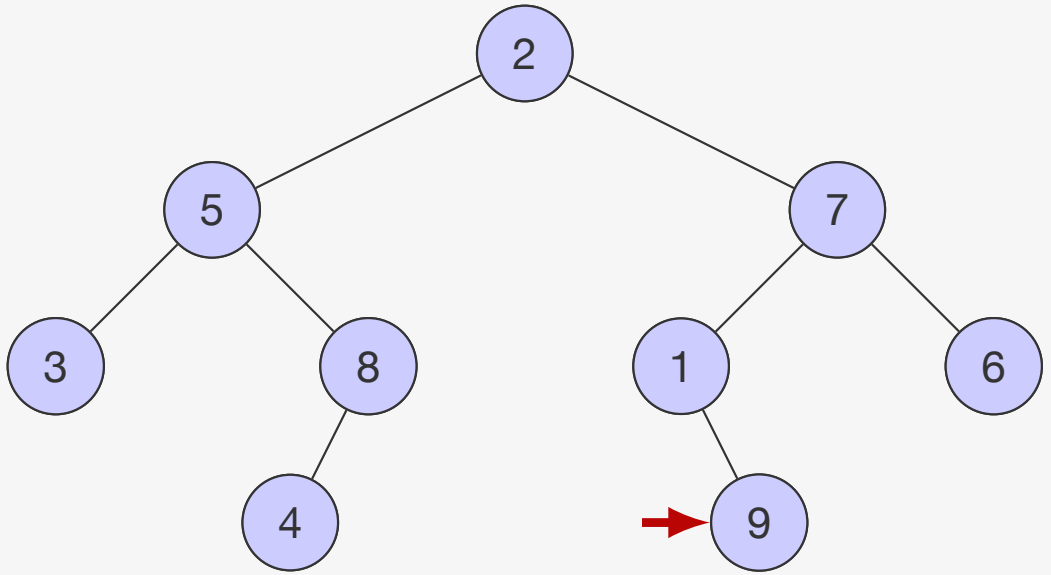


Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4,

Percorrendo os nós - em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita



Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4, 9

Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila

Implementação do percurso em largura

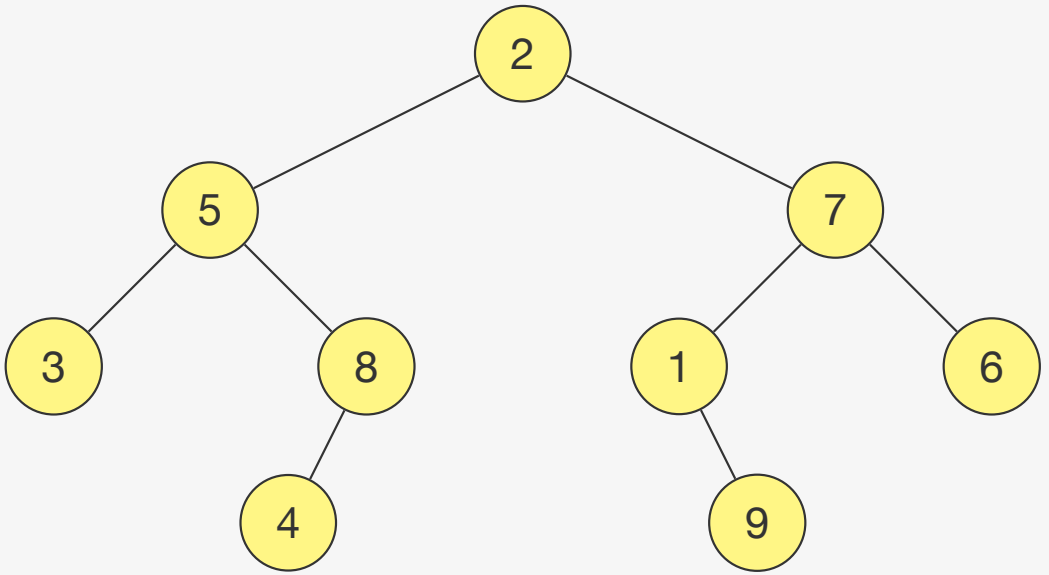
Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois

Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

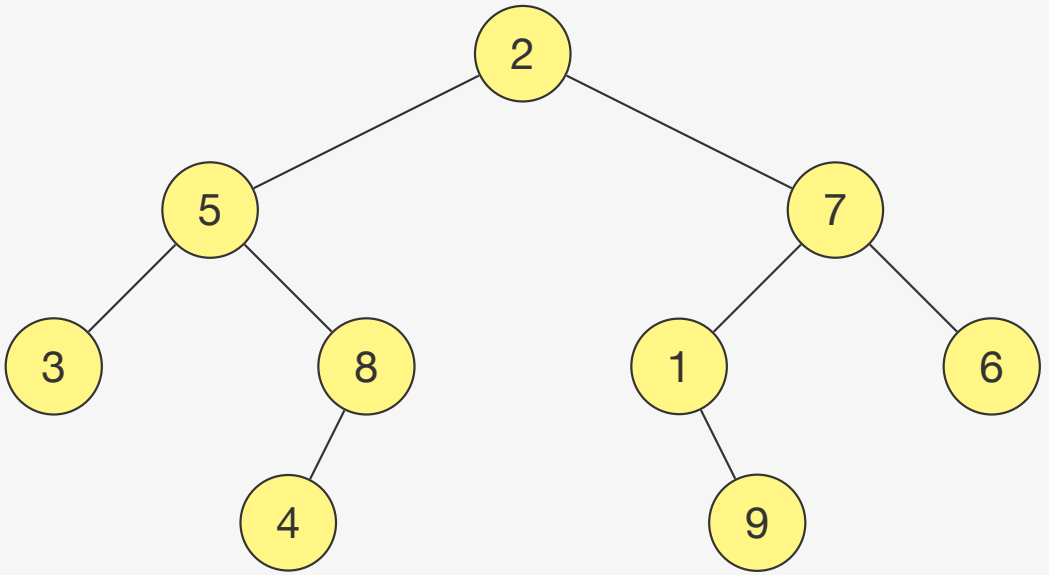


Fila

Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

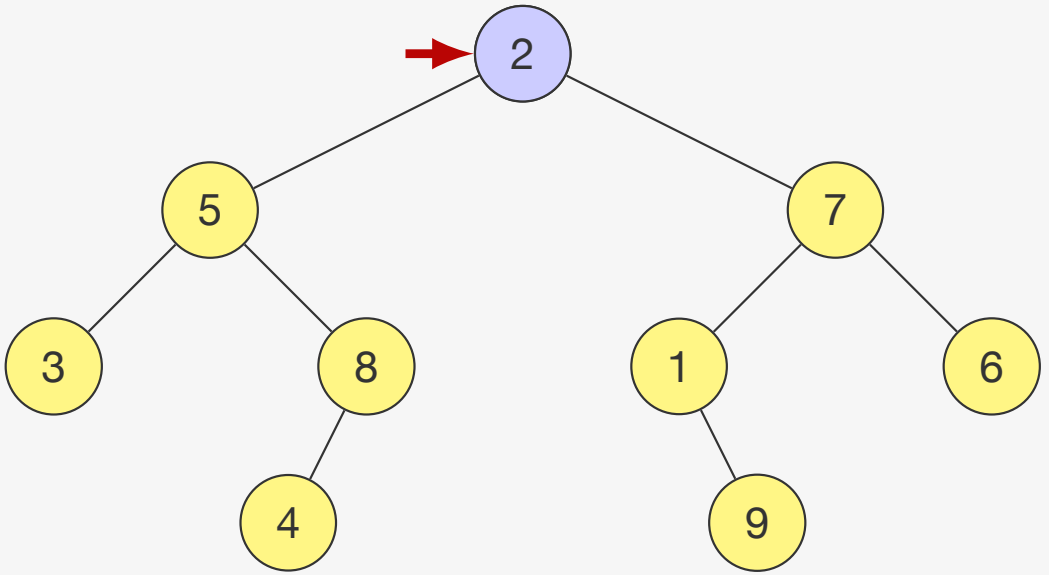


Fila [2]

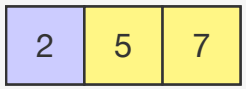
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



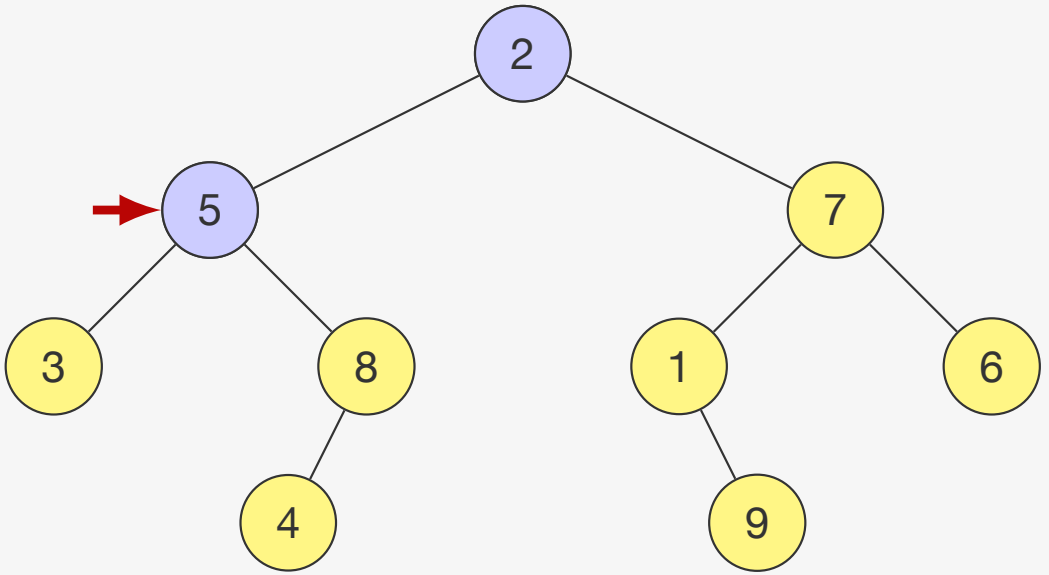
Fila



Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos

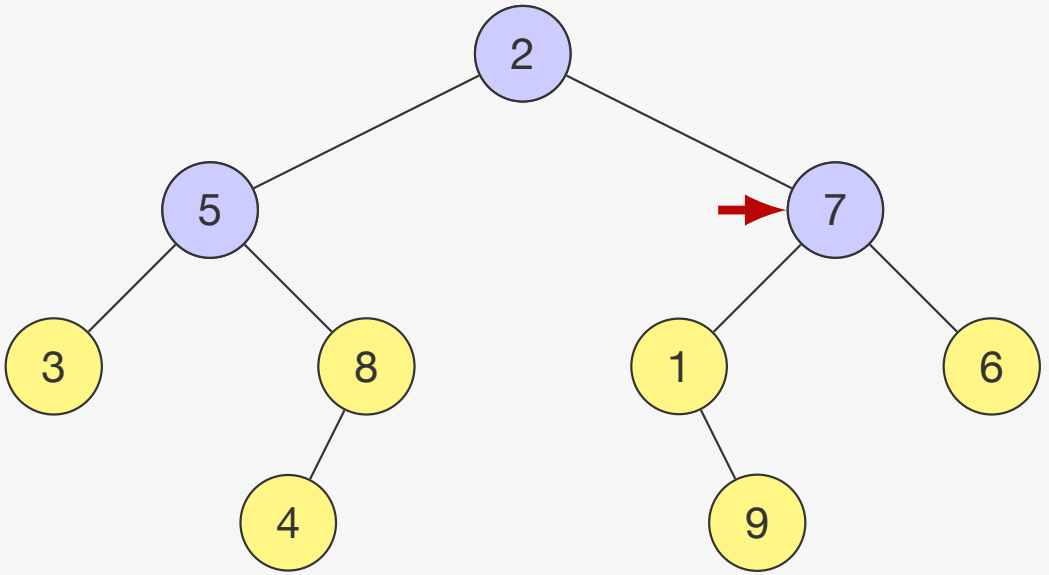


Fila

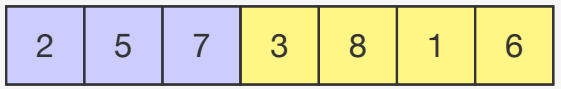
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



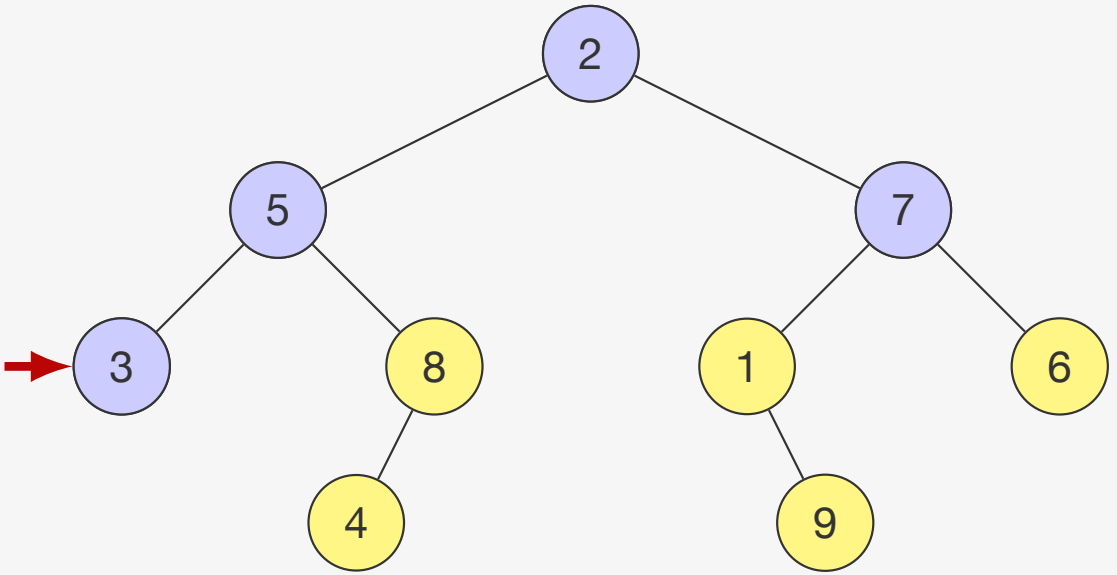
Fila



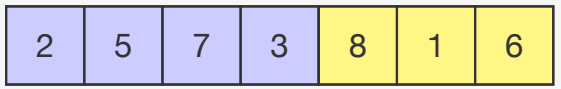
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



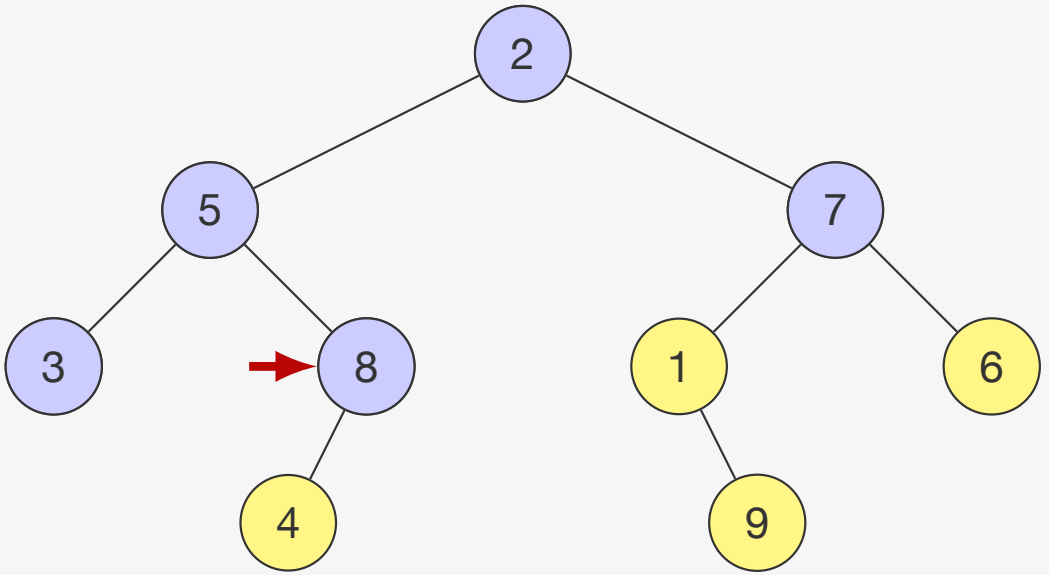
Fila



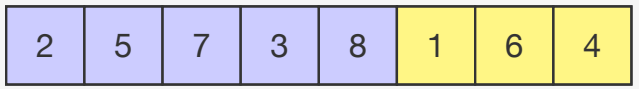
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



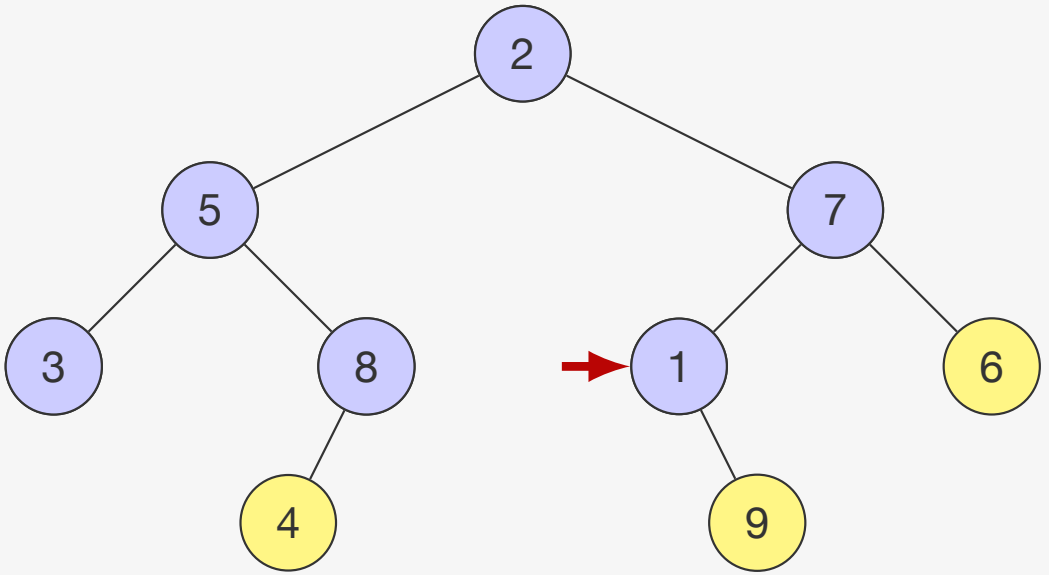
Fila



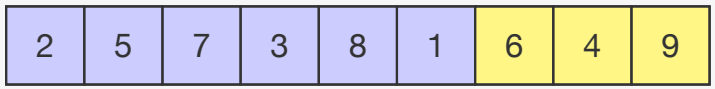
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



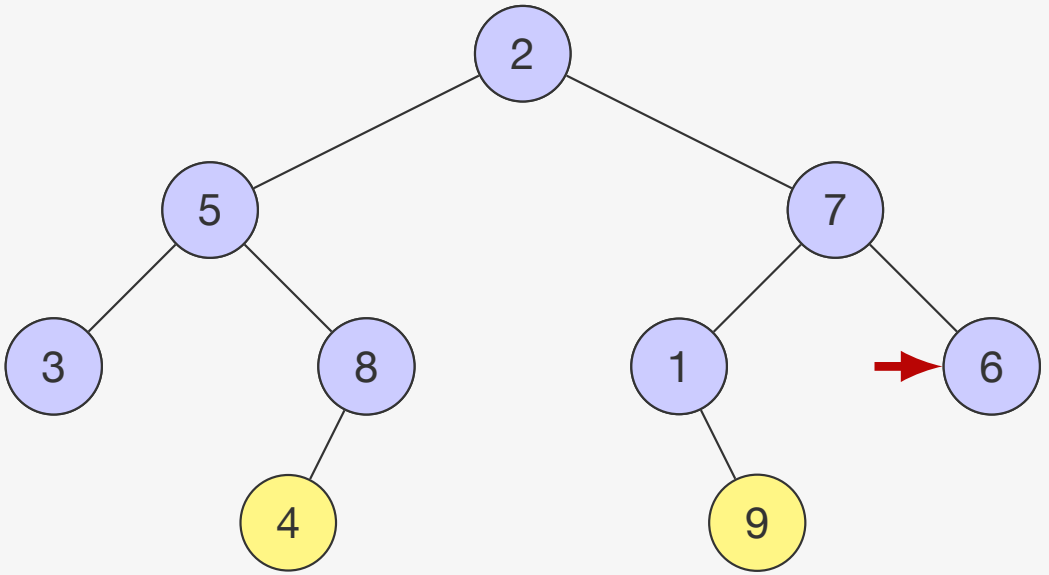
Fila



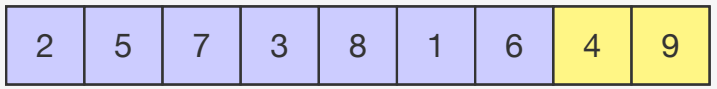
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



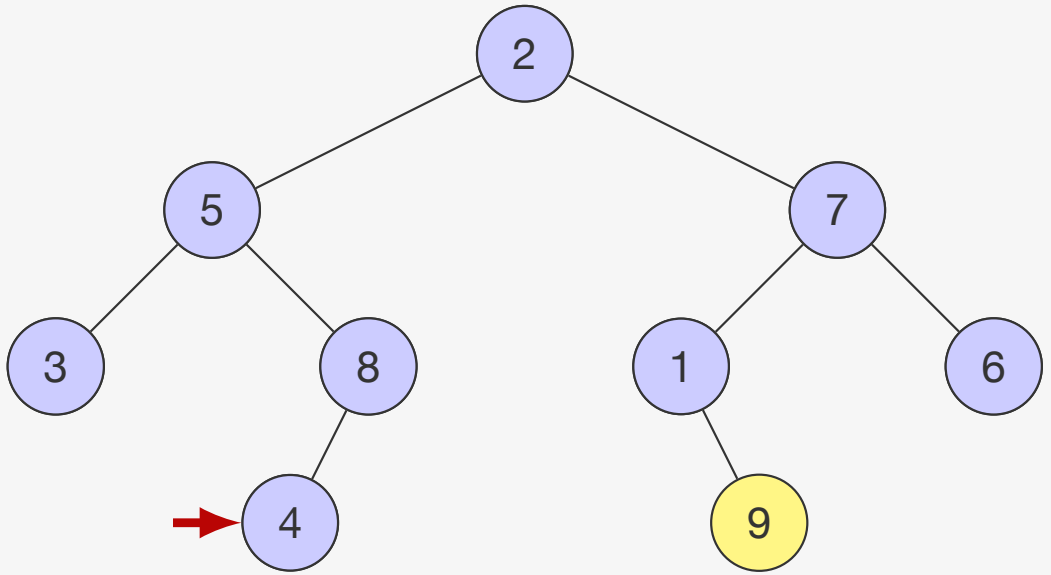
Fila



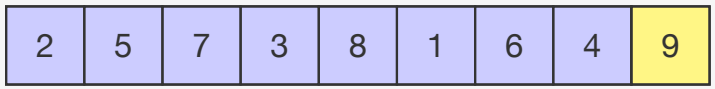
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



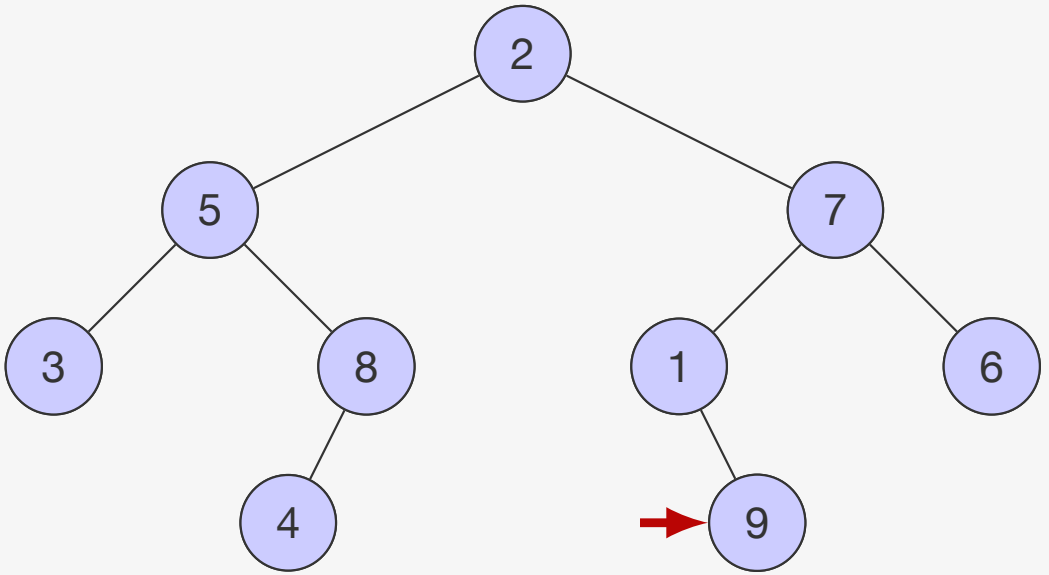
Fila



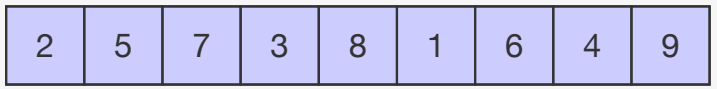
Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



Fila



Percurso em largura

```
1  void percurso_em_largura(No *arvore) {
2    No *f;
3    iniciar_fila(&f);
4    enfileirar(&f, arvore);
5    while(!fila_vazia(f)) {
6      arvore = desenfileirar(&p);
7      if (arvore) {
8        enfileirar(&f, arvore->esq);
9        enfileirar(&f, arvore->dir);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_fila(&f);
14 }
```

Percurso em largura

```
1  void percurso_em_largura(No *arvore) {
2    No *f;
3    iniciar_fila(&f);
4    enfileirar(&f, arvore);
5    while(!fila_vazia(f)) {
6      arvore = desenfileirar(&p);
7      if (arvore) {
8        enfileirar(&f, arvore->esq);
9        enfileirar(&f, arvore->dir);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_fila(&f);
14 }
```

Agora enfileiramos `arvore->esq` primeiro

Percurso em largura

```
1  void percurso_em_largura(No *arvore) {
2    No *f;
3    iniciar_fila(&f);
4    enfileirar(&f, arvore);
5    while(!fila_vazia(f)) {
6      arvore = desenfileirar(&p);
7      if (arvore) {
8        enfileirar(&f, arvore->esq);
9        enfileirar(&f, arvore->dir);
10       printf("%d ", arvore->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_fila(&f);
14 }
```

Agora enfileiramos `arvore->esq` primeiro

- E se fosse o contrário?

Exercícios

1. Escreva uma função recursiva que apaga todas as folhas de uma árvore que tenham a chave igual a um valor dado.

2. Escreva uma função que calcula o número de folhas em uma árvore dada