Aplicações de Teoria dos Jogos Algorítmica a Problemas de Transporte

Orientador: Rafael C. S. Schouery
Orientando: Ieremies V. F. Romero

Resumo

Os problemas no sistema de transporte do Brasil são diversos e atingem todos os brasileiros diariamente, encarecendo os produtos e atrasando a comuta diária. Assim, nesse projeto, estudaremos tais adversidades sob a perspectiva da Teoria dos Jogos Algorítmica (TJA), área de pesquisa que muito cresce fora do país, mas ainda está em estágio inicial no Brasil. Para tal, modelaremos situações ligadas a transporte, como a proposta por Fotakis et al. [5], utilizando TJA para então complementar o conhecimento sobre o problema.

Além disso, o projeto visa formar o aluno como pesquisador e complementar sua graduação. Ao final será produzido um relatório técnico com uma revisão bibliográfica do assunto bem como a apresentação de qualquer novo resultado obtido.

1 Introdução e justificativa

O sistema de transporte no Brasil possui uma história muito complicada e cheia de problemas. Sendo um pais que passou por uma industrialização tardia em relação aos países da Europa, a modernização brasileira foi muito rápida, ocasionando um crescimento urbanístico extremamente veloz [14].

Tais adversidades fazem com que o país pague um preço caro: R$267 bilhões de reais por ano em congestionamentos [6]. Mesmo assim, soluções como o investimento em transporte público e coletivo são colocadas em segundo plano pelo planejamento público, o que contribui até hoje para a incompetência quantitativa e qualitativa do setor como um todo, o que reflete na economia [13].

Fora do aspecto urbano, o Brasil também enfrenta problemas com as cargas e mercadorias. Com uma movimentação de US$219 bilhões em exportação em 2017 e grande parte dessa oriunda do interior, como soja, minério de ferro e açúcar bruto [11], fica evidente a necessidade de uma boa malha para o escoamento de tanta mercadoria. Apesar disso, constantemente observa-se situações tais como filas de caminhões em grandes portos, o que gera prejuízos de até R$115 milhões [8].

Ademais, o país enfrenta diversas dificuldades pela sua escolha de modal: o rodoviário. Este é ineficiente para transporte de mercadorias, como a soja, em médias e longas distâncias, se comparado ao hidroviário ou ao ferroviário [2]. Existem também problemas de infraestrutura: o Brasil possui apenas 12,4% de suas rodovias asfaltadas, o que contribui para insegurança da mercadoria e do caminhoneiro à acidentes e furtos [4].

Situações como essas podem ser resolvidas a partir de mecanismos coordenados de transporte os quais permitam realizar a movimentação de pessoas e mercadorias de forma fluida, segura e barata. Seja por meio de implantação de um sistema hidroviário ou ferroviário de grande escala ou seja pela expansão do transporte coletivo urbano, a solução de tais questões só será eficiente com a organização correta.

Para tal, podemos estudar o sistema de transporte e seus problemas pela óptica da Teoria dos Jogos, ramo da matemática aplicada responsável pelo estudo de interações entre agentes racionais os quais realizam escolhas em prol de aumentar o seu benefício. Mais especificamente, a Teoria dos Jogos Algorítmica (TJA), uma área na interseção entre a Economia e a Ciência da Computação, visa estudar as regras que regem a interação entre agentes racionais, modeladas como jogos, e questões computacionais relacionadas a elas.

2 Abordagens de Pesquisa

A seguir, apresentamos os conceitos mais importantes para o desenvolvimento desse projeto.

2.1 Teoria dos Jogos Algorítmica

Para ilustrar as definições básicas de TJA, utilizaremos um exemplo clássico na literatura:

Exemplo 1 (Dilema dos Prisioneiros)**.** Duas pessoas foram presas acusadas de cometer um crime em conjunto. A polícia, por não ter provas suficientes para condená-las, propõe um acordo no qual cada prisioneiro pode confessar o crime ou não. Caso apenas um confesse e o outro não, o primeiro será premiado com apenas 1 ano de cadeia enquanto o segundo ficará preso por 5 anos. Caso ambos confessem o crime, ficarão 4 anos presos. Porém, caso nenhum dos dois confesse, por falta de provas, eles só serão processados por pequenos delitos e ficarão presos somente 2 anos.

Nesse contexto, podemos identificar que os jogadores (os prisioneiros) possuem um conjunto de estratégias (confessar ou não confessar) que cada um pode escolher individualmente. Além disso, fica claro que o resultado para cada um dependerá não só na própria decisão como na decisão dos outros.

Para que possamos estudar o comportamento dos jogadores, também é necessário que cada jogador possua uma *ordem de preferência* entre os possíveis resultados do jogo. Tal ordenação deve ser completa, transitiva, binária e reflexiva. Uma forma de que isso aconteça é mapeando, por meio de uma função, os possíveis resultados a números reais. No exemplo acima, tal ordenação pode ser tal que cada jogador prefira o resultado no qual ele cumprirá menos tempo em cárcere ou até mesmo um desejo vingativo de que seu parceiro passe mais tempo possível.

Podemos, então, apresentar uma definição mais formal de *jogos* para a TJA.

Definição 2. Um *jogo (finito)* J é uma tupla (P, S, c), onde $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de jogadores, S é o conjunto finito de vetores de estratégias possíveis sendo $S = \times_{i \in P} S_i$ de forma que S_i é o conjunto finito de estratégias possíveis para o jogador i. Por fim, $c = (c_i)_{i \in P}$ sendo $c_i : S \to \mathbb{R}$ a função de custo para o jogador i.

Acrescido a essa definição, dizemos que o jogo J é um jogo *simultâneo* se todos os jogadores escolhem suas estratégias sem saber da escolha dos outros.

Durante o projeto, utilizaremos algumas notações e vale a pena reforçá-las aqui. Diremos que $\sigma_i \in S_i$ é uma estratégia do jogador i e chamaremos de σ o vetor de estratégias escolhidas pelos jogadores, dessa forma $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Para facilitar, diremos também que σ_{-i} é o vetor de estratégias escolhidas por todos os jogadores menos o jogador i, ou seja, $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$. Assim, para as funções de custo individuais e funções sociais, usaremos muitas vezes a notação de $c_i(\sigma) = c_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Para os conjuntos de estratégias possíveis, diremos que $S_{-i} = \times_{j \in P \setminus \{i\}} S_j$.

Além do que, assumimos que cada jogador escolha sua estratégia com base no seu próprio benefício ou custo. Isto é, presumimos um comportamento racional e egoísta de todos os jogadores. E baseados nesse comportamento, observamos algumas situações em diversos jogos onde a escolha de um jogador é óbvia, pois todas as outras possíveis não trazem redução de custos. Em casos como esse chamamos tal escolha de *resposta ótima*. A título de exemplo, no Dilema dos Prisioneiros proposto, caso o primeiro jogador escolhesse não confessar, a resposta ótima do outro jogador seria confessar, pois é como ele obtém menor tempo de prisão.

Definição 3. Dizemos que $\sigma_i \in S_i$ é uma *resposta ótima* para o jogador i quando os outros jogadores escolhem σ_{-i} se, para toda outra $\sigma'_i \in S_i$ temos

$$c_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}).$$

De fato, quando verificamos com mais cuidado o jogo proposto acima, observamos que, independente da escolha do outro jogador, confessar é a resposta ótima. Em tais circunstâncias, a estratégia que é uma resposta ótima independente da escolha dos outros jogadores é chamada de *estratégia dominante*.

Definição 4. Dizemos que uma estratégia $\sigma_i \in S_i$ é uma *estratégia dominante* para o jogador i se, para toda alternativa $\sigma'_i \in S_i$ e todo $\sigma'_{-i} \in S_{-i}$ temos que

$$c_i(\sigma_i, \sigma'_{-i}) \leq c_i(\sigma'_i, \sigma'_{-i}).$$

É importante ressaltar que nem todo jogador tem uma estratégia dominante e é possível até mesmo que nenhum jogador possua-a.

Durante a análise dos jogos, queremos avaliar e comparar os resultados do ponto de vista do desenvolvedor. Para isso, analisamos as *funções sociais*, onde uma função social f é da forma $f : S \to \mathbb{R}$.

No caso do Dilema dos Prisioneiros, podemos tomar uma função social f como a soma dos tempos que cada um passará na cadeia ou o pior dos tempos. A primeira proposta é chamada de função *utilitária* e a segunda de função *equalitária*. Se nosso objetivo é minimizar o custo para os jogadores, dizemos que o *ótimo social* é um $\sigma \in S$ tal que $f(\sigma)$ seja mínimo.

Quando estudamos os jogos, analisamos os resultados que o comportamento racional e egoísta tende a levar. Algumas definições formais foram propostas para tais equilíbrios na literatura de TJA, porém a mais relevante para esse projeto é a proposta por Nash [9]. Partindo desses pressupostos, um *equilíbrio de Nash* ocorre quando todos os jogadores escolhem suas respectivas respostas ótimas. Dito de outra forma, é uma situação na qual não vale a pena para nenhum jogador mudar individualmente sua estratégia e, com isso, reduzir seu custo, dado que os outros não mudem.

Definição 5. Dizemos que o vetor de estratégias $\sigma \in S$ é um *equilíbrio de Nash* se para para todo jogador $i \in P$ e toda alternativa $\sigma'_i \in S_i$, temos que

$$c_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}).$$

Neste contexto, quando o jogador toma decisões de forma determinística (estratégias puras), chamamos tais equilíbrios de *equilíbrios puros de Nash*. Em algumas outras situações, o jogador pode escolher uma distribuição de probabilidade e mapear suas estratégias a ela. Em cenários como esse, dizemos que esse jogador possui uma *estratégia mista* e portanto os equilíbrios de Nash alcançados dessa forma são chamados de *equilíbrios mistos de Nash*.

3 Objetivos

Durante a primeira parte do projeto, o principal objetivo será aprofundar o conhecimento do aluno sobre as noções gerais de TJA. Por meio de tal, será possível desenvolver uma base sólida sobre o assunto para que possamos aplicá-lo em problemas na prática.

Em um segundo momento, objetivamos colocar tais conhecimentos em ação estudando o problema de transporte apontado por Fotakis et al. [5].

Um jogo de transporte simultâneo, proposto em [5], é a tupla $T = (P, B, G, d)$, onde temos que $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de jogadores; $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, com $m \geq 2$, é o conjunto de meios de transporte (por exemplo, ônibus); $G = (V, E)$ é um grafo não direcionado com um nó s e um nó destino t, onde $V = N \cup \{s, t\}$; $d : E \to \mathbb{R}$ é a função de distância. Nesse jogo, cada jogador está posicionado em um vértice de G e escolhe um ônibus, sem saber da escolha dos outros jogadores, para chegar a t.

Além disso, a função de custo de cada jogador é igual ao tempo de viagem até t, este, por sua vez, é proporcional à distância percorrida pelo ônibus do nó onde está o jogador até o destino t. Acrescido a isso, cada ônibus já possui, previamente, sua ordem de passar pelos vértices definida (chamada de permutação), todos partindo de $s \in V$, para chegar em $t \in V$. Por exemplo, se a permutação do ônibus $j \in B$ for $\pi_j = (1, 2, 3, 4)$ significa que ele irá passar por $s \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to t$ nessa ordem. Caso algum jogador não queira o ônibus j, ele irá pular o jogador, mas manterá a ordenação.

Estuaremos as versões métrica e não métrica do problema. Para ser métrica, é importante que exista uma função de distância $d : E \to \mathbb{R}_+$ e que o par (V, d) seja um *espaço métrico*.

Definição 6. Sendo $G = (V, E)$ um grafo não direcionado e $d : E \to \mathbb{R}_+$ uma função de distância tal que:

1. $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in V$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in V$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in V$

então (V, d) é um *espaço métrico*.

Exemplo 7. Observando a Figura 1, que ilustra uma situação métrica, na qual o valor próximo de cada aresta é o custo mínimo de viajar entre os dois pares de vértices que ela liga. Nessa situação, temos que $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ e as permutações $\pi_i = (1, 2, 3, 4)$ para todo $i \in B$. Dessa maneira, um possível resultado é $\sigma = (1, 1, 2, 2)$, mas note que o jogador 3 pode reduzir seu custo (tempo de viagem) de $c_3(\sigma) = 3$ para $c_3(\sigma') = 1$ se $\sigma' = (1, 1, 1, 2)$. Observe que em $(1, 1, 1, 2)$ todo jogador está jogando uma resposta ótima e portanto σ' é um equilíbrio puro de Nash.

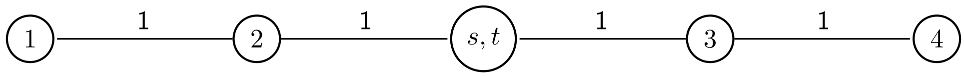

Figura 1: Representação da situação métrica proposta.

Nesse problema, estudaremos as medidas de quantificação do quão ineficiente, comparado com o ótimo social, o jogo pode ser, dado que os jogadores tenham um comportamento egoísta. Fazendo isso, podemos analisar se vale a pena impor mais restrições e normas em prol de alcançar resultados melhores. Algumas formas de quantificar tal ineficiência foram propostas, mas as mais importantes para o desenvolvimento desse projeto são o *Preço da Anarquia* [7] e o *Preço da Estabilidade* [1].

Definição 8. Sendo f uma função social para um jogo J e $ENP(J)$ o conjunto de todos os equilíbrios puros de Nash para o jogo J, dizemos que o *Preço da Anarquia (PdA)* é definido como

$$PdA(f, J) = \frac{max_{\sigma \in ENP(J)} f(\sigma)}{min_{\sigma' \in S} f(\sigma')}.$$

Ou seja, PdA é a razão entre o pior valor da função social dentro dos equilíbrios possíveis e o ótimo social. Com essa métrica podemos observar a ineficiência no pior caso, supondo que os jogadores agirão em prol somente do próprio bem. Assim, teremos o limite de quão ruim o resultado do jogo pode ser.

Definição 9. Sendo f uma função social para um jogo J e $ENP(J)$ o conjunto de todos os equilíbrios puros de Nash para o jogo J, dizemos que o *Preço da Estabilidade (PdE)* é definido como

$$PdE(f, J) = \frac{min_{\sigma \in ENP(J)} f(\sigma)}{min_{\sigma' \in S} f(\sigma')}.$$

Dessa forma, PdE é a razão entre o melhor valor da função social dentro dos equilíbrios possíveis e o ótimo social do jogo e assim determinamos o quão próximo do ótimo social podemos chegar através de um equilíbrio.

Para esse problema, estudaremos três funções sociais diferentes. A primeira delas é uma função *equalitária*, na qual nos interessa o maior custo entre os jogadores, ou seja

$$E(\sigma) = \max_{i \in P} c_i(\sigma).$$

Outra função útil é a que reflete o total de distância percorrida pelos ônibus, retratando assim o custo para empresa e o impacto ambiental. Para um vetor de estratégias σ e $j \in B$, dizemos que $n_j = |\{i : \sigma_j = j\}|$ o número de jogadores que escolheram o ônibus j e $(j_1, j_2, \ldots, j_{n_j})$ é a ordem dos jogadores que o o ônibus j irá pegá-los. Podemos definir essa função como

$$D(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} d(j_i, j_{i+1}),$$

Função Social	Ótimo social (σ)	Resultado em σ'	PdA	PdE
D	$D(\sigma) = 5$	$D(\sigma') = 6$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
E	$E(\sigma) = 3$	$E(\sigma') = 4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
U	$D(\sigma) = 8$	$U(\sigma') = 10$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{8}$

Tabela 1: Representação das medidas de ineficiência no Exemplo 7 apresentado.

onde $j_{n_j+1} = t$. Perceba que essa função não leva em conta a distância entre s e o primeiro jogador a ser pego pelo ônibus.

Por fim, uma função *utilitária*, que reflete a soma total do tempo gasto pelo passageiros, nos dá métricas interessantes do custo social do jogo. Assim, definimos tal função como:

$$U(\sigma) = \sum_{i \in P} c_i(\sigma).$$

Exemplo 10. Veja que sob a luz desses novos conceitos, podemos fazer uma análise mais cuidadosa do jogo descrito no Exemplo 7. Observe que para todas as funções acima descritas, o resultado $\sigma = (1, 1, 2, 2)$ é o ótimo social. Porém, como vimos, os jogadores tendem a um equilíbrio, nesse caso $\sigma' = (1, 1, 1, 2)$. A Tabela 1 mostra como isso afeta o resultado da função social e pode ser avaliado pelas medidas apresentadas.

É importante salientar que, apesar de no Exemplo 7 o PdA e o PdE serem iguais, isso nem sempre ocorre.

Uma outra versão do problema, dita sequencial, trabalha em circunstâncias parecidas, porém cada jogador escolhe sua estratégia seguindo uma ordem e possui a informação do que os jogadores que já escolheram decidiram. Para mais informações sobre essa versão, veja [3]. Assim, chamamos as medidas de ineficiência já apresentadas de Preço da Anarquia Sequencial (PdAS) e Preço da Estabilidade Sequencial (PdES) quando nos referirmos a essa versão.

Como ilustrado por Jhonatas [3], podemos observar que ainda existem muitas partes do problema de Fotakis et al. [5] a serem estudadas. Portanto, também visamos debruçar-nos sobre tais lacunas e preenchê-las.

	PdA		PdE		PdAS	
Funções	LI	LS	LI	LS	LI	LS
D	n	n	n	n	n	n
E	$2\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1$	$2\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1$	$O(n/m)$	$\Omega(n/m)$	$2n - 1$	$2n - 1$
U	?	$2n - 1$	?	?	?	$2n - 1$

Tabela 2: Sumário dos limites inferiores (LI) e superiores (LS) para a ineficiência dos equilíbrios, para cada função social. Os símbolos ? mostram as questões em aberto. Adaptada de [3].

Além disso, o desenvolvimento deste projeto objetiva a introdução do aluno nas atividades da academia. Desde aprendizado de técnicas para redação de textos científicos

	Meses					
	1º-2º	3º-4º	5º-6º	7º-8º	9º-10º	11º-12º
Básico TJA	•					
Básico Fotakis		•	•			
Problemas Fotakis				•	•	
Relatório						•

Tabela 3: Cronograma de trabalho.

até mesmo no amadurecimento do aluno como pesquisador, a Iniciação Científica visa complementar as práticas acadêmicas desenvolvidas na universidade. Para isso, o aluno entrará em contato com textos científicos por meio dos artigos e teses que estudará e ao final redigirá um por conta própria, apresentando os resultados do projeto.

4 Plano de trabalho e cronograma

Durante os primeiros 2 meses, o aluno irá estudar os conceitos básicos de TJA a partir de livros como o *Algorithmic Game Theory* [10] e o *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations* [12]. Durante as reuniões semanais, ele apresentará ao orientador o que foi estudado durante a semana para garantir que não haja dúvidas e consolidar o conhecimento.

Posteriormente, começaremos a estudar mais a fundo o problema proposto por Fotakis [5] por 4 meses. Nessa fase, utilizaremos o material já produzido sobre o assunto para tanto fortalecer na prática o conhecimento de TJA do aluno como para prepará-lo para a próxima parte.

Então, debruçaremo-nos sobre os problemas ainda restantes a serem resolvidos no assunto, como explicado com mais detalhes na seção de Objetivos, durantes os 4 meses seguintes.

Por fim, nos últimos 2 meses, será produzido um relatório técnico com uma revisão da literatura sobre o assunto bem como qualquer novo resultado que venhamos a obter durante o projeto. Enquanto isso ocorre, utilizaremos as reuniões semanais para orientação na escrita do texto.

5 Materiais e métodos

Para o desenvolvimento do projeto, o aluno utilizará-se de artigos e materiais de consulta disponibilizados pela UNICAMP de maneira gratuita, grande parte desses de forma online ou por meio da Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Ademais, serão realizados encontros semanais entre o aluno e o orientador para debater os conteúdos estudados e acompanhar o progresso do projeto. Além disso, o atual doutorando Francisco Jhonatas também participará das reuniões já que sua dissertação [3] foi acerca do mesmo tema.

Referências

[1] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Eva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, 38(4):1602–1623, 2008.

[2] Vivian Helena Capacle Correa and Pedro Ramos. A precariedade do transporte rodoviário brasileiro para o escoamento da produção de soja do Centro-Oeste: situação e perspectivas. *Revista de Economia e Sociologia Rural*, 48:447 – 472, 06 2010.

[3] Francisco Jhonatas Melo da Silva. Game-theoretic analysis of transportation problems: Análise de problemas de transporte sob a perspectiva da teoria de jogos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação, Campinas, SP, 2018.

[4] Confederação Nacional de Transporte. Somente 12,4% da malha rodoviária brasileira é pavimentada. `http://www.cnt.org.br/imprensa/noticia/somente-12-da-malha-rodoviaria-brasileira-pavimentada`, 2018. 2019-03-20.

[5] Dimitris Fotakis, Laurent Gourvès, and Jérôme Monnot. Selfish transportation games. In *International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pages 176–187. Springer, 2017.

[6] GloboNews Guilherme Ramalho. Brasil perde R$ 267 bilhões por ano com congestionamentos. `https://g1.globo.com/globonews/noticia/2018/08/07/brasil-perde-r-267-bi-por-ano-com-congestionamentos.ghtml`, 2018. 2019-03-20.

[7] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Theoretical Aspects of Computer Science*, STACS'99, pages 404–413, Berlin, Heidelberg, 1999. Springer, Springer-Verlag.

[8] G1 Santos Mariane Rossi. Prejuízo com filas no porto de santos chega a R$ 115 milhões, diz sindicato. `http://g1.globo.com/sp/santos-regiao/noticia/2013/03/congestionamentos-causam-prejuizo-de-r-115-milhoes-no-porto-de-santos.html`, 2013. 2019-03-20.

[9] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

[10] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.

[11] The Observatory of Economic Complexity. Brazil. `https://atlas.media.mit.edu/pt/profile/country/bra/`, 2017. 2019-03-20.

[12] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. Cambridge University Press, 2008.

[13] Márcio Rogério Silveira and Giraldi Cocco Rodrigo. Transporte público, mobilidade e planejamento urbano: contradições essenciais. 2013.

[14] Paulo Eduardo V Viceconti. O processo de industrialização brasileira. *Revista de Administração de Empresas*, 17(6):33–43, 1977.