Enunciado

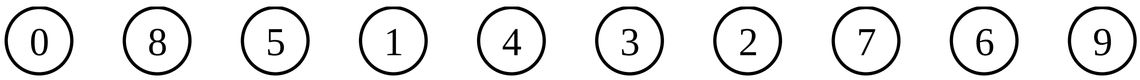
Para a permutação 8 5 1 4 3 2 7 6, quantos são os ciclos em seu grafo de ciclos? Para cada um deles, diga se é um ciclo par ou ímpar, de acordo com as definições do texto.

Resolução

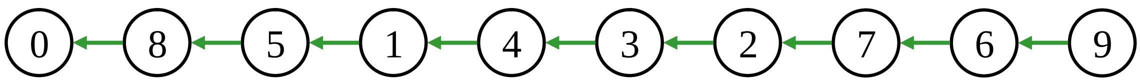
O grafo de ciclos $G(\pi)$, para a permutação $\pi = \{8\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2\ 7\ 6\}$, pode ser construído da seguinte forma:

- Expande-se a permutação π, colocando-se em seus extremos, $\pi_0 = 0$ e $\pi_{n+1} = n + 1$, resultando em $\pi = \{0\ 8\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2\ 7\ 6\ 9\}$.

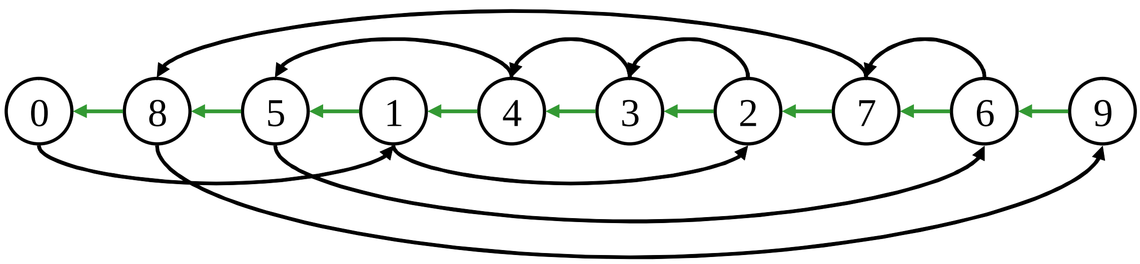
- Representa-se cada número por um vértice.



- Arestas verdes incidem em números adjacentes da permutação expandida, direcionadas na ordem inversa da permutação, ou seja, da direita para a esquerda.

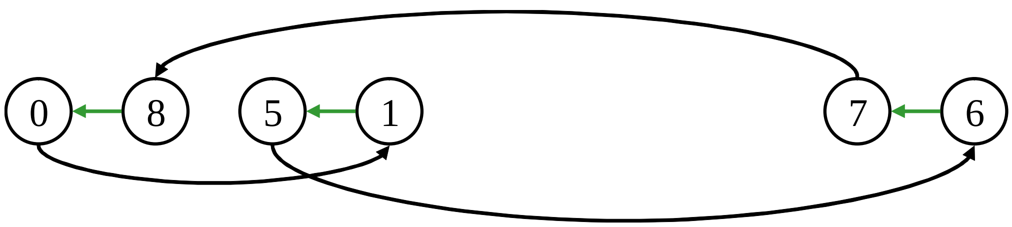


- Arestas pretas incidem em números consecutivos, na direção do menor para o maior.

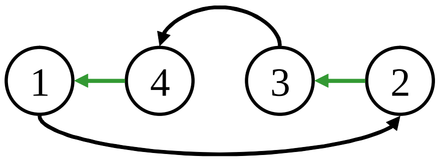


Um ciclo alternante do grafo $G(\pi)$ corresponde em um ciclo onde as arestas pretas e verdes se alternam. Um ciclo alternante é par, se ele for composto por um número par de arestas pretas (ou verdes); e ímpar caso contrário. A partir do grafo de ciclos, foi possível enumerar três ciclos alternantes, sendo eles:

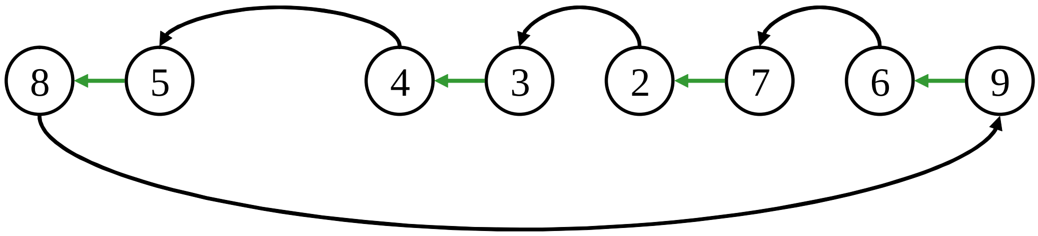
- Ciclo 1: composto por 6 arestas, das quais 3 pretas e 3 verdes, logo um ciclo ímpar.



- Ciclo 2: composto por 4 arestas, das quais 2 pretas e 2 verdes, logo um ciclo par.



- Ciclo 3: composto por 8 arestas, das quais 4 pretas e 4 verdes, logo um ciclo par.



Enunciado

Encontre uma série de transposições que ordene a permutação acima e que seja de comprimento mínimo.

Resolução

Dada a permutação expandida $\pi = \{0\ 8\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2\ 7\ 6\ 9\}$, uma transposição $p(i,j,k)$ consiste em uma alteração da permutação, de tal forma que o intervalo $[\pi_i, \pi_{i+1}, \ldots, \pi_{j-2}, \pi_{j-1}]$ da permutação π é realocado para a posição definida entre os elementos π_k e π_{k+1}.

Um limitante inferior do número mínimo de transposições ($d(\pi)$), para se ordenar uma permutação π qualquer, é dado por:

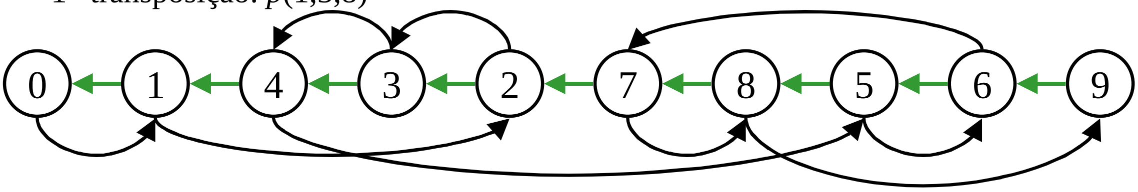
$$d(\pi) \geq \frac{n+1-c_{odd}(\pi)}{2}$$

onde $c_{odd}(\pi)$ consiste no número de ciclos alternantes ímpares de $G(\pi)$. Assim, como foi encontrado um único ciclo alternante ímpar para a permutação π, um limite inferior do mínimo de transposições consiste em:

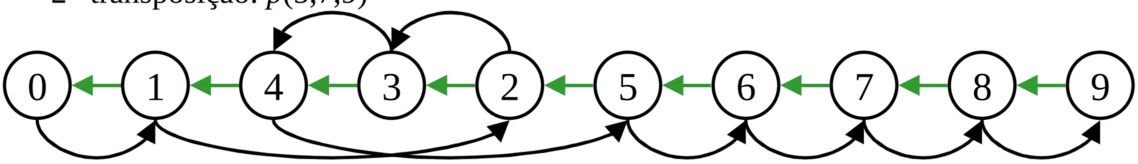
$$d(\pi) \geq \frac{8+1-1}{2} = 4$$

Logo, se for possível encontrar uma seqüência de quatro transposições que ordene a permutação, ela será mínima. Sendo assim, a seqüência de quatro transposições apresentada a seguir é mínima:

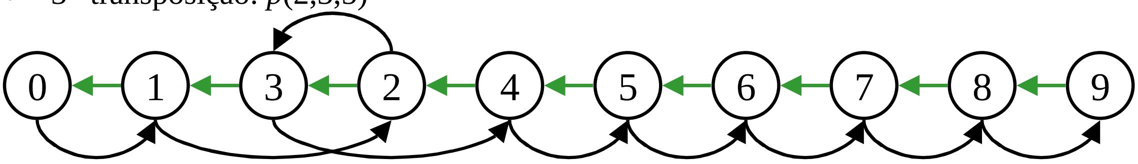
- 1ª. transposição: $p(1,3,8)$



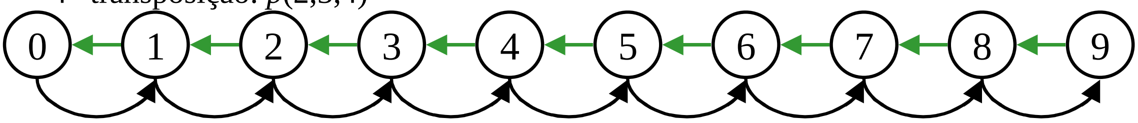
- 2ª. transposição: $p(5,7,9)$



- 3ª. transposição: $p(2,3,5)$



- 4ª. transposição: $p(2,3,4)$



Agradecimentos

Ao Victor de Abreu Iizuka e seu grupo por disponibilizar as soluções destes exercícios.

Bibliografia

V. Bafna and P. A. Pevzner. Sorting by transpositions. *SIAM J. Discrete Math.*, 11(2):224-240, 1998.