MO640 - Exercícios - Sobre a aula de 2006-04-26

1. Christie mostrou em seu artigo que sempre existem operações de *block interchange* **boas** (no sentido de Mira e Meidanis). Porém, sua abordagem é exclusivamente posicional. Seu trabalho neste exercício é traduzir este resultado para a abordagem algébrica. Mais especificamente, considere dois genomas circulares π e σ. Mostre que, exceto no caso $\pi = \sigma$, sempre existe um block interchange β aplicável a π e tal que β divide π^{-1}. Obs.: Como *block interchange* é uma operação que não mexe na orientação dos genes, você pode trabalhar com genomas de uma só fita se preferir.

De acordo com Christie, na abordagem posicional, se π é diferente da identidade, existem elementos x e y tais que

$$\pi = [1 \ \ldots \ (x-1) \ \ldots \ y \ \ldots \ x \ \ldots \ (y+1) \ \ldots]$$

e o *block interchange* com parâmetros $(\pi^{-1}(x-1)+1, \pi^{-1}(y)+1, \pi^{-1}(x)+1, \pi^{-1}(y+1))$ elimina pelo menos 2 *breakpoints*, transformando π em

$$\pi' = [1 \ \ldots \ (x-1) \ x \ \ldots \ y \ (y+1) \ \ldots]$$

Traduzindo para a abordagem algébrica, concluímos que, se $\pi \neq \sigma$, existem elementos x e y tais que

$$\pi = [\ \ldots \ x \ \ldots \ y \ \ldots \ \sigma x \ \ldots \ \sigma y \ \ldots]$$

e os blocos que devem ser trocados são

$$\pi = [\ \ldots \ x \ \{\ldots \ y\} \ \ldots \ \{\sigma x \ \ldots\} \ \sigma y \ \ldots]$$

Logo, o *block interchange* β é dado por

$$\beta = (\pi x \ \sigma x)(\pi y \ \sigma y)$$

Agora devemos provar que β divide $\sigma\pi^{-1}$. Aplicando $\sigma\pi^{-1}$ aos elementos πx e πy, vemos que

$$\sigma\pi^{-1}(\pi x) = \sigma\pi^{-1}\pi x = \sigma x$$

$$\sigma\pi^{-1}(\pi y) = \sigma\pi^{-1}\pi y = \sigma y$$

Logo, existe um ciclo ρ em $\sigma\pi^{-1}$ tal que $\rho = (\ldots \ \pi x \ \sigma x \ \ldots)$, ou seja, σx é consecutivo a πx, e existe um ciclo μ tal que $\mu = (\ldots \ \pi y \ \sigma y \ \ldots)$, ou seja, σy é consecutivo a πy. Pode ser que μ e ρ sejam o mesmo ciclo. Como provar que a permutação β, formada pela multiplicação de dois 2-ciclos cujos elementos são consecutivos em $\sigma\pi^{-1}$, divide $\sigma\pi^{-1}$? Generalizando o problema:

Considere dois elementos distintos x e y pertencentes a uma permutação δ. Prove que a permutação $\alpha = (x \ \delta x)(y \ \delta y)$ divide δ.

Se provamos que α divide δ, então está provado que β divide $\sigma\pi^{-1}$. Sabemos que $\alpha|\delta$ se $\|\delta\alpha\| = \|\delta\| - \|\alpha\|$, pois $\alpha = \alpha^{-1}$. Analisando a permutação $\delta\alpha$, vemos que

$$\begin{aligned}
\delta\alpha(\delta x) &= \delta x \\
\delta\alpha(\delta y) &= \delta y \\
\delta\alpha(x) &= \delta^2 x \\
\delta\alpha(y) &= \delta^2 y \\
\delta\alpha(u) &= \delta u \qquad \forall u \notin (x, y, \delta x, \delta y)
\end{aligned}$$

Logo, os elementos δx e δy são fixos em $\delta\alpha$, e qualquer outro elemento pertencente ao suporte de δ pertence também ao suporte de $\delta\alpha$. Logo, $supp(\delta) = supp(\delta\alpha) + 2$. Além disso, como $\delta\alpha x = \delta^2 x$ e $\delta\alpha y = \delta^2 y$, percebe-se que $\delta\alpha$ corresponde a uma *deleção* dos elementos δx e δy em relação à permutação δ. Para verificar isso, seja ρ o ciclo em δ que contenha x, e aplicando $(x\ \delta x)$ à direita temos:

$$\begin{aligned}
\rho &= (\ \ldots x\ \delta x\ \ldots) \\
\rho(x\ \delta x) &= (\ \ldots x\ \delta x\ \ldots)(x\ \delta x) \\
\rho(x\ \delta x) &= (\ \ldots x\ \delta^2 x\ \ldots)(\delta x) \\
\rho(x\ \delta x) &= (\ \ldots x\ \delta^2 x\ \ldots)
\end{aligned}$$

Logo, $\rho(x\ \delta x)$ representa uma deleção do elemento δx em ρ, e os outros elementos mantêm a ordenação original. De forma similar, $(y\ \delta y)$ é uma deleção do elemento δy.

A permutação δ pode ser representada por

$$\delta = \prod^n \rho_i$$

de forma única, onde $\rho_i, i = 1, \ldots, n$ são ciclos disjuntos. Logo, $\|\delta\| = \sum^n \|\rho_i\|$. Escolhendo k e j tais que $x \in \rho_k$ e $y \in \rho_j$, $k \neq j$, temos que

$$\delta\alpha = (\prod^n \rho_i)\alpha = (\prod^n_{\substack{i\neq k\\ i\neq j}} \rho_i)\rho_k\rho_j\alpha = (\prod^n_{\substack{i\neq k\\ i\neq j}} \rho_i)\rho'_k\rho'_j$$

onde $\rho'_k = \rho_k(x\ \delta x)$ e $\rho'_j = \rho_j(y\ \delta y)$. Como vimos, as permutações $(x\ \delta x)$ e $(y\ \delta y)$ representam deleções dos elementos δx e δy, respectivamente. Logo, como a norma de um ciclo é $n-1$, onde n é o número de elementos no ciclo, temos que $\|\rho'_k\| = \|\rho_k\| - 1$ e $\|\rho'_j\| = \|\rho_j\| - 1$. Portanto:

$$\|\delta\alpha\| = \|(\prod^n_{\substack{i\neq k\\ i\neq j}} \rho_i)\rho'_k\rho'_j\| = (\sum^n_{\substack{i\neq k\\ i\neq j}} \|\rho_i\|) + \|\rho'_k\| + \|\rho'_j\| = \sum^n \|\rho_i\| - 2 = \|\delta\| - \|\alpha\|$$

Logo, $\|\delta\alpha\| = \|\delta\| - \|\alpha\|$.

Se $k = j$, ou seja, x e y pertencem ao mesmo ciclo ρ_k, a situação é semelhante, mas ao invés de deletar δx e δy de ciclos distintos, ocorrem 2 deleções no mesmo ciclo ρ_k:

$$\delta\alpha = (\prod^n \rho_i)\alpha = (\prod^n_{i\neq k} \rho_i)\rho_k\alpha = (\prod^n_{i\neq k} \rho_i)\rho'_k$$

onde $\rho'_k = \rho_k\alpha$. O ciclo ρ'_k tem 2 elementos a menos do que ρ_k, pois sofreu as deleções $(x\ \delta x)$ e $(y\ \delta y)$, portanto $\|\rho'_k\| = \|\rho_k\| - 2$, e de forma similar temos

$$\|\delta\alpha\| = \|(\prod^n_{i\neq k} \rho_i)\rho'_k\| = (\sum^n_{i\neq k} \|\rho_i\|) + \|\rho'_k\| = \sum^n \|\rho_i\| - 2 = \|\delta\| - \|\alpha\|$$

Portanto, nos dois casos $\|\delta\alpha\| = \|\delta\| - \|\alpha\|$, ou seja, α divide δ e, conseqüentemente, β divide $\sigma\pi^{-1}$.