MO640 - Exercícios - Sobre a aula de 2006-03-22

1. Em aula viu-se que a equação diferencial

$$\Phi' = A\Phi \tag{1}$$

onde Φ e A são matrizes 3×1 e 3×3, respectivamente, admite como solução

$$\Phi = e^{tA}\Gamma$$

Qual seria a solução para uma equação da forma

$$\Psi' = \Psi B$$

onde Ψ e B são matrizes $1\times$n e n×n, respectivamente?

Usando o operador de transposição de matrizes, temos:

$$\begin{array}{rcll} \Psi' &=& \Psi B & \Rightarrow \\ (\Psi')^T &=& (\Psi B)^T & \Rightarrow \\ (\Psi^T)' &=& B^T \Psi^T & \end{array}$$

Com isso, a equação fica na forma (1), com $\Psi^T = \Phi$ e $B^T = A$, e a solução é:

$$\Psi^T = e^{tB^T}\Gamma$$

Aplicando novamente o operador de transposição:

$$\begin{array}{rcll} \Psi &=& (e^{tB^T}\Gamma)^T & \Rightarrow \\ \Psi &=& \Gamma^T e^{tB} & \end{array}$$

Como Γ é uma constante determinada pelas condições iniciais do problema, é indiferente que esteja na forma transposta. Portanto, a solução final é

$$\Psi = \Gamma e^{tB}$$