Elementos de Álgebra
Ata de aula - 27/10/2004

Miguel Galves

1 Permutação

Uma permutação δ sobre um conjunto S é uma função bijetora que mapeia os elementos do conjunto em outros.

Uma forma de representar um mapeamento é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \delta(x_1) & \delta(x_2) & ... & \delta(x_n) \end{pmatrix}$$

onde a primeira linha representa os elementos do conjunto e a segunda linha representa os elementos para os quais eles são mapeados.

2 Suporte

Define-se um **suporte** de uma permutação δ como sendo o conjunto formado pelos elementos de S tal que $x \neq \delta(x)$. Por exemplo, o suporte de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

é $\{3, 4, 2\}$.

3 Ordem

A ordem $o(\delta)$ de uma permutação δ corresponde ao menor número inteiro positivo k tal que $\delta^k = 1$, onde δ^k indica o produto de k permutações iguais a δ e 1 indica a identidade.

4 Composição

A operação de composição $\bullet$ de dois mapeamentos δ e τ produz o mapeamento resultante da aplicação dos mapeamentos em sequência. Por exemplo, se

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\tau = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\delta \bullet \tau = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5 Ciclos

Existem permutações especiais chamadas de ciclo. Os elementos i de um ciclo de tamanho n são mapeados da seguinte forma: $i_1 \to i_2 \to ... \to i_n \to i_1$. Pode-se usar uma notação simplificada para mapeamentos com ciclos. Por exemplo:

$$\delta \bullet \tau = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad = \quad (2\ 1\ 4).$$

No exemplo acima, o elemento 3 é mapeado nele mesmo e não faz parte do ciclo, não sendo portando representado. No caso de termos dois ciclos, o mapeamento fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad = \quad (1\ 4)(2\ 3).$$

A notação simplificada em geral de um mapeamento consiste em se decompor o mapeamento em vários ciclos. Se um conjunto tem tem n elementos, possui $n!$ permutações e $\frac{n!}{k(n-k)!}$ ciclos de tamanho k.

Pelo corolário 1 do teorema 28, toda permutação pode ser escrita como um produto de 2-ciclos.

6 Assinatura e paridade

Define-se ϵ_0 como sendo a **assinatura** de uma permutação δ. Se δ é um ciclo, temos que $\epsilon_0 = (-1)^{r-1}$, onde r é o tamanho do ciclo. Para uma permutação em geral, decompõe-se a permutação em ciclos disjuntos, e a assinatura é o produto das assinaturas destes ciclos.

Assim, pode se definir a **paridade** de um mapeamento: se $\epsilon_0 = 1$ então δ é par, e se $\epsilon_0 = -1$ então δ é ímpar. A paridade de uma multiplicação é igual a multiplicação das paridades, e a **Identidade** é par. O conceito de paridade é útil para simplificar algumas análises.