Induzindo a um bom entendimento do Princípio da Indução Finita

Jamil Ferreira

(Apresentado na VI Encontro Capixaba de Educação Matemática e utilizado como notas de aula para disciplinas introdutórias do curso de matemática)

Dentre os temas do ensino de matemática que mais dão margem a interpretações equivocadas está o do Princípio da Indução Finita (PIF) ou Princípio da Indução Matemática ou simplesmente Princípio da Indução.

Ele costumava ser abordado já no ensino médio, o que raramente ocorre no ensino de hoje. Atualmente o PIF é estudado nos cursos superiores de matemática, nas disciplinas de álgebra ou de análise. Pode ser estudado também, de forma elementar, na disciplina de cálculo I para os cursos de ciências exatas, como ferramenta para a demonstração de alguns teoremas posteriores referentes a propriedades dos números naturais. Falo aqui da forma mais usual do PIF, como enunciada abaixo. Não trataremos da chamada segunda forma do PIF, também útil, e equivalente à tratada aqui.

No ensino médio e em nível de cálculo I, ele é enunciado formalmente e, logo depois, aparecem os problemas que solicitam demonstrações utilizando o PIF, invariavelmente o da soma dos termos de uma progressão aritmética.

Seu enunciado mais comum é o seguinte (veja por exemplo *Fundamentos de Aritmética – Domingues, H.H. – Atual Editora – 1991)* :

"Seja $a \in N$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $P_{(n)}$. Admitamos ainda que seja possível provar o seguinte:

(i) $P(a)$ é verdadeira;

(ii) Para todo $r \geq a$, se $P(r)$ é verdadeira, então $P(r+1)$ também é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq a$."

A experiência demonstra que o estudante até que consegue resolver os problemas propostos imitando alguns exemplos que se seguem após o enunciado do PIF, mas ele não entende a essência do princípio, isto é, ele não sabe o que está fazendo quando faz as contas para demonstrar que $P(r)$ implica $P(r+1)$. Para ele, a hipótese de indução "$P(r)$ é verdadeira" é uma hipótese do problema em questão e ele deve apenas demonstrar que $P(r+1)$ é verdadeira. Além disso, há o sentimento de que, ao assumir a hipótese de indução, esteja-se utilizando a tese para demonstrar ela própria. São raros os alunos que, ao estudarem o PIF pela primeira vez, entendem que o que se deve demonstrar é a veracidade da implicação "$P(r) \Rightarrow P(r+1)$", e não a de $P(r+1)$ isoladamente. E que, além disso, há situações em que tal implicação é verdadeira, mas $P(r)$ não é verdadeira para nenhum $r \in N$, daí a importância de (i) do enunciado.

O propósito dessas notas, já trabalhadas por mim em disciplinas introdutórias do curso de matemática com bons resultados, é apresentar uma introdução ao PIF. O objetivo é que o estudante adquira uma boa compreensão do enunciado do PIF e do seu poder como ferramenta de demonstração de fatos ligados aos números inteiros.

Não estou aqui preocupado com aspectos teóricos ligados ao PIF, como sua equivalência com o Princípio da Boa Ordem ou sua inserção na axiomática de Peano para o conjunto dos números naturais.

A idéia dessa abordagem elementar é oferecer aos alunos uma seqüência de problemas simples, que lidam com objetos matemáticos dominados pelo aluno, que os induzam naturalmente a admitir o

PIF com clareza. Vamos a eles. No que segue, consideraremos o conjunto dos números naturais N como sendo $\{1,2,3,4,...\}$.

1. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r+3 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

2. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r+1 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

3. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   (i) $0 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r+1 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

4. Seja A um subconjunto de Z do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r-2 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

5. Seja A um subconjunto de Z do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r-1 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

6. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$ e $r \geq 2$, então $r-1 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

7. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   (i) $5 \in A$ e $30 \in A$;
   (ii) Se $r \in A$, então $r+2 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

8. Seja A um subconjunto de N do qual se sabe o seguinte:
   Se $r \in A$, então $r+2 \in A$.
   O que se pode afirmar a respeito de A?

9. Seja P uma propriedade relativa aos números naturais da qual se sabe o seguinte:
   (i) $P(5)$ é verdadeira (isto é, a propriedade P é verdadeira para o número 5);
   (ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.
   O que se pode afirmar acerca da propriedade P ?
   Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, \acute{e}\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

10. Seja P uma propriedade relativa aos números naturais da qual se sabe o seguinte:
   (i) $P(0)$ é verdadeira;
   (ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
   O que se pode afirmar acerca da propriedade P ?
   Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, \acute{e}\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

11. Seja P a seguinte propriedade relativa aos números naturais:

$$P(n): \quad 1 + 2 + ... + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

   (a) Mostre que:
   (i) $P(1)$ é verdadeira;
   (ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

   (b) Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, \acute{e}\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

12. Seja P a seguinte propriedade relativa aos números naturais:

$$P(n): \quad 1 + 2 + ... + n = \frac{(1+n)n}{2} + 3$$

   (a) Mostre que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

   (b) Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, \acute{e}\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

13. Seja P uma propriedade relativa aos números naturais da qual se sabe o seguinte:
   Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
   O que se pode afirmar acerca da propriedade P ?
   Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, \acute{e}\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

14. Seja P a seguinte propriedade relativa aos números naturais:

$$P(n): \quad n = n + (n-1)(n-2)(n-3)...(n-1000000)$$

   Para que valores de n, $P(n)$ é verdadeira?

15. Seja P uma propriedade relativa a números naturais da qual se sabe o seguinte:
$P(n)$ é verdadeira para todo $n = 1, 2, 3, ..., 1000000$.
O que se pode afirmar acerca da propriedade P ?
Se $A = \{n \in N \mid P(n)\, é\, verdadeira\}$, então o que se pode afirmar a respeito de A?

A partir deste ponto, os alunos já sabem o que é o PIF!...

A seguir apresentamos algumas proposições que podem ser demonstradas utilizando-se o PIF. O PIF é um poderoso meio de demonstração de teoremas em todas as áreas da matemática. Tente provar as proposições abaixo utilizando o PIF:

1) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para todo número natural $n \geq 1$.

2) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo natural $n \geq 1$.

3) (*Desigualdade de Bernoulli*) Se a é um número real e $a \geq -1$, então, para todo número natural $n \geq 1$, é verdadeira a desigualdade $(1+a)^n \geq 1 + na$.

4) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é igual a $180°(n-2)$.

5) O número mínimo de movimentos permitidos para se transferir os n discos de um pino da Torre de Hanói para outro é $2^n - 1$. (O jogo será explicado em aula)

6) Tente encontrar o erro na seguinte demonstração da proposição $P(n)$: *Numa turma de n alunos, se um deles é botafoguense, todos são botafoguenses.*

"Demonstração": Claro que $P(1)$ é verdadeira. Mostremos agora que, para $n \geq 1$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$. Suponha então $P(n)$ verdadeira e considere uma turma com $n+1$ alunos com um botafoguense. Denotaremos os alunos por $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$. A turma pode ser olhada como a união das turmas contendo os n alunos $a_1, ..., a_n$ e os n alunos $a_2, ..., a_{n+1}$. O botafoguense certamente estará em pelo menos uma das turmas de n alunos acima. Pela hipótese de indução, todos os alunos daquela turma são botafoguenses, portanto os da outra também, já que há vários alunos em comum nessas turmas. Daí, são botafoguenses todos os $n+1$ alunos da turma considerada. Concluímos assim que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

7) Um resultado conhecido como "*Postulado de Bertrand*" afirma que existe sempre um número primo entre n e $2n$. Use esse resultado para provar que, para $n > 1$, o $n-ésimo$ número primo positivo p_n satisfaz a desigualdade $p_n < 2^n$.

Bibliografia:

1. Cálculo e Geometria Analítica – Thomas/Finney – Vol. 1 – LTC - 1988
2. Fundamentos de Aritmética – Hygino H. Domingues – Atual Editora – 1991
3. Elementos de Álgebra – L.H. Jacy Monteiro – LTC – 1974
4. Teoria dos Números – Marcus Soares e outros – Editora UnB – 1998
5. Introdução à Teoria dos Números – José Plínio de Oliveira Santos – IMPA - 1998
6. Curso de Álgebra – A. Hefez – IMPA - 1993