MC448 – Complexidade de Algoritmos
Lista de Exercícios 10

Orlando Lee

A numeração abaixo nos exercícios refere-se à **segunda edição** (CLRS).

Observação: para alguns dos exercícios, você vai precisar se lembrar de alguns algoritmos de ordenação vistos em aula!

Árvore geradora mínima

1. (CLRS 23.1-1) Seja (u, v) uma aresta de peso mínimo em um grafo G. Mostre que (u, v) pertence a alguma árvore geradora mínima. Note que podem existir várias arestas com peso mínimo e talvez não seja possível incluir todas em uma árvore geradora mínima.

2. (CLRS 23.1-11) Seja G um grafo e suponha que seja conhecida uma árvore geradora mínima T de G. Agora imagine que um raio caiu e o peso de uma aresta (u, v) diminuiu. Descreva um algoritmo eficiente que determina uma árvore geradora mínima do novo grafo. (Não se preocupe em mostrar que o algoritmo funciona, isto é difícil. Estou interessado apenas na idéia.)

3. (CLRS 23.2-3) A implementação do algoritmo de Prim com heaps de Fibonacci é assintoticamente mais rápida do que a implementação com min-heap para um grafo esparso $G = (V, E)$ (isto é, $|E| = O(V)$)? E para grafos densos ($|E| = O(V^2)$)? Como $|E|$ e $|V|$ devem estar relacionados para que a implementação do algoritmo de Prim com heaps de Fibonacci seja assintoticamente mais rápida do que a implementação com min-heap?

4. (CLRS 23.2-4) Suponha que os pesos das arestas de um grafo sejam inteiros no intervalo de 1 a $|V|$. Quão rapidamente você consegue implementar o algoritmo de Kruskal? E se os pesos forem inteiros no intervalo de 1 a W onde W é uma contante?

5. (CLRS 23.2-5) Suponha que os pesos das arestas de um grafo sejam inteiros no intervalo de 1 a $|V|$. Quão rapidamente você consegue implementar o algoritmo de Prim? E se os pesos forem inteiros no intervalo de 1 a W onde W é uma contante?

6. (CLRS 23.2-8) Professor Toole propôs um algoritmo baseado em divisão-e-conquista para o problema da Árvore Geradora Mínima descrito a seguir.. Dado um grafo $G = (V, E)$, particione o conjunto V de vértices em duas partes V_1 e V_2 de modo que seus tamanhos diferem de no máximo um. Para $i = 1, 2$ seja E_i o conjunto das arestas com extremos apenas em V_i. Recursivamente encontre uma árvore geradora mínima em cada um dos subgrafos $G_i = (V_i, E_i)$. Finalmente encontre uma aresta leve no corte (V_1, V_2) e acrescente-a às duas árvores obtidas para obter uma árvore geradora de G.

   Mostre que o algoritmo está correto ou apresente um exemplo para o qual o algoritmo falha.