MC405 – Teoria dos Grafos
MC878 – Teoria e Aplicações de Grafos

Orlando Lee

Resumo

Na disciplina MO405/MC878 veremos muitas demonstrações que usam o método de prova chamado *indução matemática*. Este texto é um pequeno resumo descrevendo alguns exemplos deste importante método. Maiores detalhes e exemplos podem ser encontrados na Seção 3.3 de

> K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and its applications*, McGraw-Hill, 2003.

e no Capítulo 2 de

> U. Manber, *Introduction to Algorithms: a creative approach*, Addison-Wesley, 1989.

Se você não possui familiaridade com esse tipo de prova, eu recomendo urgentemente que você leia uma dessas referências.

1 Indução matemática

Antes de explicar o método, vamos descrever um exemplo. Suponha que queremos obter uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ temos o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1+3 & = & 4 \\ 1+3+5 & = & 9 \\ 1+3+5+7 & = & 16 \\ 1+3+5+7+9 & = & 25 \end{array}$$

Olhando esses valores parece razoável "chutar" que a soma dos n primeiros naturais é n^2. Mas como podemos provar algo deste tipo? Certamente, **não** é possível testar isto para todo natural n. Precisamos de um *método* que nos permita *provar* nosso *chute* para todo natural n sem de fato precisar verificá-lo para cada um.

Indução matemática (ou *indução finita* ou *indução simples*) é um método extremamente poderoso que pode ser usado para provar afirmações como do último parágrafo. Ele funciona da seguinte forma. Suponha que P seja uma proposição (ou teorema) que queremos provar. Suponha que P inclui um parâmetro n cujo valor é um número natural. Para deixar claro essa dependência escrevemos $P(n)$. Por exemplo, $P(n)$ poderia ser: a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n, provamos que as duas seguintes condições são satisfeitas:

1. $P(1)$ vale (ou $P(n)$ vale para $n = 1$), e
2. Para todo $n > 1$, se $P(n-1)$ vale então $P(n)$ vale.

Por que essas duas condições são suficientes para provar $P(n)$ para todo natural n? A condição 1 diz que $P(n)$ vale para $n = 1$. As condições 1 e 2 juntas implicam que $P(n)$ também vale para $n = 2$. Mas então aplicando a condição 2 novamente concluímos que $P(n)$ também vale para $n = 3$ e assim por diante.

Para visualizar isto, considere o exemplo descrito no livro do Rosen: imagine uma fileira muito grande de pedras de dominó (todas de pé) numeradas na ordem $1, 2, 3 \ldots, n$. Suponha que $P(n)$ é a afirmação "a pedra n é derrubada". Se a primeira pedra é derrubada — ou seja $P(1)$ é verdade — e valer que quando a pedra $n-1$ é derrubada, a pedra n também é derrubada — ou seja, $P(n-1)$ implica $P(n)$ — então todas as pedras são derrubadas. Esta analogia é basicamente o mecanismo de prova por indução matemática.

Nomenclatura. A condição 1 é chamado **base da indução** e a condição 2 é chamada **passo da indução**. Usualmente chamamos de **hipótese de indução** a suposição de que $P(n-1)$ vale. Assim, verificar o passo de indução consiste em supor que vale a hipótese de indução e mostrar que $P(n)$ vale. Outra forma equivalente de descrever o passo de indução que aparece em vários livros é:

2. Para todo $n \geq 1$, se $P(n)$ vale então $P(n+1)$ vale.

Você pode se convencer disso pensando novamente nas pedras de dominó. Eu prefiro usar a primeira forma por razões didáticas que não vêm ao caso.

Vamos aplicar o método para provar nosso "chute" inicial.

Teorema 1.1. *A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.*

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação: a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Base: $n = 1$. Obviamente $1 = 1$ e portanto $P(1)$ vale.

Passo de indução: suponha que $n > 1$ e que $P(n-1)$ vale. Precisamos provar que $P(n)$ vale.

A afirmação $P(n-1)$ equivale a dizer que

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) = (n-1)^2.$$

Se você estranhou é porque não percebeu que o $(n-1)$-ésimo natural ímpar é $2n-3$, certo? Agora queremos verificar que $P(n)$ vale, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Usando $P(n-1)$ no lado esquerdo da igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) &= (n-1)^2 + (2n-1) \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Isto mostra que $P(n-1)$ implica $P(n)$. O princípio de indução matemática então nos diz que $P(n)$, ou seja, a afirmação a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2, é verdadeira. ∎

Outra observação simples é que se quisermos provar uma afirmação $P(n)$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é fixo, basta provar que

1. $P(n_0)$ vale, e
2. Para todo $n > n_0$, se $P(n-1)$ vale então $P(n)$ vale.

Espero que isto seja suficientemente claro.

Algumas provas por indução envolvem alguns *truques* (coisas que em geral alunos(as) detestam...). Você pode ver outros exemplos nas referências. Vamos ilustrar um deles.

Teorema 1.2. *Para todo natural $n \geq 1$ vale que*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Base: $n = 1$. Obviamente $1/2 < 1$ e assim $P(1)$ vale.

Passo de indução: suponha $P(n-1)$ vale e vamos mostrar que $P(n)$ vale.

A idéia mais natural é considerar a soma dos $n - 1$ primeiros termos no lado esquerdo dessa igualdade e usar a hipótese de indução: a soma dos $n-1$ primeiros termos é menor que 1. Entretanto, o leitor pode ver que isso não nos diz se a soma do lado esquerdo é menor que 1.

A solução (ou truque?) é considerar os $n - 1$ *últimos* termos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] < \frac{1}{2},$$

onde a última desigualdade segue da hipótese de indução. Agora, somando $1/2$ a ambos os lados da expressão acima, obtemos a desigualdade desejada para n:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

■

2 Indução forte

A seguinte variante de prova por indução é muito útil em Teoria dos Grafos. De novo suponha que queremos provar uma proposição $P(n)$. O método de prova por **indução forte** consiste em provar:

1. $P(1)$ vale (ou $P(n)$ vale para $n = 1$, e
2. Se $P(k)$ vale para todo $k : 1 \leq k < n$, então $P(n)$ vale.

A diferença em relação ao método de indução usual é a hipótese de indução. Em vez de supor que $P(n-1)$ vale e tentar provar que $P(n)$ vale, supomos que $P(k)$ vale para todo natural k *menor que* n e tentamos provar que $P(n)$ vale. Com este método não é necessário *reduzir* o problema de **um**, basta reduzi-lo! Isto permite mais flexibilidade e também oferece mais informação na hora de fazer a prova.

Eis alguns exemplos. Todo número natural pode ser escrito como produto de primos. Por exemplo, $12 = 2.2.3$ e $17 = 17$. Vamos provar isto.

Teorema 2.1. *Todo natural $n \geq 2$ pode ser escrito como um produto de primos.*

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação: n pode ser escrito como um produto de primos.

Base: $n = 2$. $P(2)$ vale pois 2 pode ser escrito como um produto de um primo, ele mesmo.

Passo de indução: Suponha que $P(k)$ vale para todo natural $k < n$. Vamos mostrar que $P(n)$ vale.

Há dois casos: ou n é primo ou n é composto. Se n é primo então obviamente $P(n)$ vale. Suponha então que n é composto. Isto significa que n possui algum divisor distinto de 1 e n, digamos, a. Assim, existe algum natural b tal que $n = ab$. Note que $2 \leq a, b < n$. Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como produtos de primos. Mas então é óbvio que n pode ser escrito também como produto de primos: basta usar os primos que aparecem nas fatorações de a e b. Isto conclui o passo de indução. Portanto, o resultado segue. ∎

Para perceber o poder do método, tente imaginar como seria fazer uma prova do teorema acima usando indução matemática. Não é óbvio como fazê-lo (eu não sei pelo menos...).

Vamos provar o próximo resultado usando indução matemática e indução forte. O leitor pode decidir qual é mais elegante.

Teorema 2.2. *Mostre que toda quantia de postagem de pelo menos 12 centavos pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e 5 centavos.*

Em bom "matematiquês" queremos provar que todo natural $n \geq 12$ pode ser escrito como uma soma de 4's e 5's.

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação: uma postagem de n centavos pode ser feita com selos de 4 e 5 centavos.

Vamos primeiro usar indução matemática para provar $P(n)$ para $n \geq 12$.

Base: $n = 12$. $P(12)$ vale pois $12 = 4 + 4 + 4$.

Passo de indução: suponha que $n > 12$ e que $P(n-1)$ vale. Vamos provar que $P(n)$ vale.

Pela hipótese de indução, sabemos fazer uma postagem de $n - 1$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Se um selo de 4 centavos foi usado, então basta trocá-lo por um selo de 5 centavos. Obtemos então uma postagem de n centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Se nenhum selo de 4 centavos foi usado, então a postagem foi feita usando apenas selos de 5 centavos. Como $(n - 1) \geq 12$, pelo menos três selos de 5 centavos foram usados. Substitua estes três selos de 5 centavos por quatro selos de 4 centavos. Obtemos então uma postagem de n centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Isto completa o passo de indução e a prova pelo método de indução matemática.

Vamos agora provar o mesmo resultado usando indução forte. Usaremos uma base um pouco mais complicada para fazer o passo de indução.

Base: $n = 12, 13, 14, 15$. Essas postagens podem ser feitas respectivamente com três selos de 4, dois selos de 4 e um de 5, um selo de 4 e dois de 5, e três selos de 5.

Passo de indução: suponha que $n \geq 16$ e que $P(k)$ vale para $k < n$. Pela hipótese de indução existe uma postagem de $n - 4$ centavos (note que $n - 4 \geq 12$) usando apenas selos de 4 e 5. Complete esta postagem com um selo adicional de 4 centavos. Obtemos então uma postagem de n centavos. Isto completa a prova. ■

Referências

[1] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its applications*, McGraw-Hill, 2003.

[2] U. Manber. *Introduction to Algorithms: a Creative Approach*, Addison-Wesley, 1989.