Heurísticas Lagrangianas e Fixação de Variáveis

- **Ideia**: em muitos casos a solução do problema lagrangiano é "quase" viável, sendo possível projetar uma heurística simples que a converte em uma solução do problema original de boa qualidade.
- **Exemplo**: problema do *set covering*

$$z = \min \left\{ \sum_{j \in N} c_j x_j : \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1 \ \forall i \in M, x \in \mathbb{B}^n \right\}.$$

Dualizando-se todas as restrições chega-se a:

$$z(u) = \sum_{i \in M} u_i + \min \left\{ \sum_{j \in N} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) x_j : x \in \mathbb{B}^n \right\},$$

com $u \in \mathbb{R}^m_+$.

Set covering: heurística e fixação de variáveis

- **Heurística Lagrangiana**:

  - $x(u) \leftarrow$ solução do lagrangiano;
  - remover as linhas de M já cobertas por $x(u)$;
  - resolver o SCP remanescente de **forma gulosa** obtendo a solução y;
  - fazer $x^H = x(u) + y$;
  - eliminar redundâncias de x^H
  - **retornar** x^H.

- **Fixando variáveis**:
  A ideia é fazer $x_i = \beta$, com $\beta \in \{0, 1\}$, sempre que for possível garantir que existe uma solução ótima onde $x_i = \beta$.

Set covering: fixação de variáveis

- seja $\bar{z}$ o valor da melhor solução **viável** conhecida. Soluções x de **melhor custo** devem satisfazer a:

$$\sum_{i \in M} u_i + \min_{x \in \mathbb{B}^n} \sum_{j \in N} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) x_j \leq cx < \bar{z}$$

- $N_1 \doteq \{j \in N : c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij} > 0\}$: ou seja, as variáveis com índices em N_1 valem ZERO na solução do Problema Primal Lagrangiano.
- $N_0 \doteq \{j \in N : c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij} < 0\}$: ou seja, as variáveis com índices em N_0 valem UM na solução do Problema Primal Lagrangiano.
- **Teorema 12**: Se $k \in N_1$ e $\sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N_0} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) + (c_k - \sum_{i \in M} u_i a_{ik}) \geq \bar{z}$ então $x_k = 0$ para qualquer solução viável **melhor**.
  Se $k \in N_0$ e $\sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N_0 - \{k\}} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) \geq \bar{z}$ então $x_k = 1$ para qualquer solução viável **melhor**.

Set covering: exemplo

- **Instância**: $m = 4,\ n = 6,\ c = (6, 6, 11, 5, 8, 8)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $u = (4, 4, 3, 3)$, tem-se que IP(u) é dado por:

$$z(u) = 14 + \min\{-x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : x \in \mathbb{B}^6\}.$$

- Logo, $x(u) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $z(u) = 13$.

Set covering: exemplo (cont.)

- **Problema** SCP **reduzido**: (remove linhas 1 e 3 !)

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 8x_6 \\ & x_4 + x_5 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ & x \in \mathbb{B}^6 \end{aligned}$$

- **Solução heurística do** SCP **reduzido**:
  $y = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \Longrightarrow x^H = x(u) + y = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$

  custo: $\bar{z} = 14$ (o valor ótimo é 13 ou 14 !)

- No Teorema 12, temos que $N_0 = \{1\}$ e $N_1 = \{3, 4, 5, 6\}$ e, qualquer solução com custo menor que 14 deve satisfazer $x_1 = 1$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. $\square$

Escolha da Relaxação Lagrangiana

- $$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s.a.} & A^1x \leq b^1, \\ & A^2x \leq b^2, \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{array}$$
- **O que dualizar:** $A^1x \leq b^1$**,** $A^2x \leq b^2$ **ou ambos ?**
- **Considerar**:
  (i) a *"força"* do limitante w_{LD} dado pelo dual lagrangiano;
  (ii) a facilidade de resolver o Problema Primal Lagrangiano;
  (iii) a facilidade de resolver o Problema Dual Lagrangiano.
- **Análise**:
  (i) Teorema 3;
  (ii) depende do problema específico que se está resolvendo;
  (iii) **difícil prever!** número de multiplicadores pode ser um bom indício: mais multiplicadores, mais difícil ...

Exemplo: *Generalized assignment*

- $$\begin{array}{lll} \max & z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1, \ \forall i \in M, & (\dagger) \\ & \sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j \in N, & (\ddagger) \\ & x \in \mathbb{B}^{m \times n} & \end{array}$$

- **Relaxação 1**: dualizar restrições em $(\dagger)$ e em $(\ddagger)$

$$w^1(u, v) = \max_{x \in \mathbb{B}^{m \times n}} \{ \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i - a_{ij} v_j) x_{ij} + \sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N} v_j b_j \}$$

- **Relaxação 2**: dualizar restrições em $(\dagger)$

$$\begin{array}{ll} w^2(u) = & \max \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i) x_{ij} + \sum_{i \in M} u_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j \in N, \\ & x \in \mathbb{B}^{m \times n} \end{array}$$

- **Relaxação 3**: dualizar restrições em (‡)

$$\begin{array}{lll} w^3(v) = & \max \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - a_{ij} v_j) x_{ij} + \sum_{j \in N} v_j b_j \\ \text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1, \ \forall i \in M, \\ & x \in \mathbb{B}^{m \times n} \end{array}$$

- **Análise**:
  - $w^1_{LD} = w^3_{LD} = z_{LP}$ com $w^1(u, v)$ e $w^3(v)$ podendo ser calculados por inspeção.
  - A relaxação 3 tem menos multiplicadores que a relaxação 1.
  - As restrições (‡) são do tipo **mochila**. Portanto, para A e b inteiros, a relaxação 2 pode ser computada através de um algoritmo de Programação Dinâmica aplicado a n mochilas binárias. Como as restrições (‡) sozinhas não dão a envoltória convexa das soluções inteiras do problema da mochila binária, o **Teorema 3** garante que $w^2_{LD} \leq z_{LP}$.