Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Relaxação Lagrangiana

Cid C. de Souza / IC–UNICAMP

1º semestre de 2018

Relaxação Lagrangiana

- Problema original:

$$
\begin{array}{lrl}
IP & & z = \max cx \\
 & \text{s.a.} & Ax \leq b, \\
 & & Dx \leq d, \qquad \text{(restrições complicadoras)} \\
 & & x \in \mathbb{Z}^n_+
\end{array}
$$

- $X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\}$.
- $z' = \max\{cx : x \in X\}$ *é fácil !*
  - z' é um limite superior (dual) de z !
  - solução ótima de X em geral não satisfaz $Dx \leq d$.
- Para todo $u \in \mathbb{R}^m_+$, o **problema lagrangiano** é dado por:

$$
\begin{array}{lrl}
IP(u) & & z = \max cx + u(d - Dx) \\
 & \text{s.a.} & x \in X
\end{array}
$$

- **Proposição 1**: $IP(u)$ é uma relaxação de IP.
- Portanto, a ideia é levar as restrições complicadoras para a função objetivo, penalizando-as com o vetor u.
- A penalidade u_i associada à restrição $D_i x \leq d_i$ é chamada de multiplicador de Lagrange desta restrição.
- **Pergunta**: qual é o conjunto de multiplicadores que corresponde ao melhor limitante dual $z(u)$ para z ?
- **Problema dual Lagrangiano**:

$$(DL) \qquad w = \min\{z(u) : u \geq 0\}.$$

Observação: se as restrições complicadoras forem de igualdade, o vetor u torna-se irrestrito em sinal.

- **Proposição 2**: Para $u \geq 0$, se
  (i) $\overline{x}$ é solução ótima de $IP(u)$ e
  (ii) $D\overline{x} \leq d$ e
  (iii) $D_i\overline{x} = d_i$ sempre que $u_i > 0$,

  então $\overline{x}$ é ótimo de IP.

  Prova: ... $\square$
- Observação 1: a condição (iii) representa uma complementaridade de folga.
- Observação 2: se as restrições complicadoras forem de igualdade, um ponto $\overline{x}$ satisfazendo (i) e (ii) já é uma solução ótima para IP !
- Terminologia: ao se aplicar a relaxação lagrangiana, diz-se que as restrições complicadoras foram dualizadas.

- Relaxação lagrangiana para o problema de localização de facilidades (UFL):

$$
\begin{array}{lll}
(IP) & \max & z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in N} f_j y_j \\
& \text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in M, \qquad \leftarrow \text{dualizar} \\
& & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\, i \in M, j \in N, \\
& & x \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{B}^n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(IP(u)) & \max & z(u) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i) x_{ij} - \sum_{j \in N} f_j y_j \\
& & \qquad + \sum_{i \in M} u_i \\
& \text{s.a.} & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\, i \in M, j \in N, \\
& & x \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{B}^n
\end{array}
$$

- $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - u_i$: custos lagrangianos.
- Como se resolve $IP(u)$?

- Decompor $(IP(u))$ em n subproblemas: um por facilidade.

$$
\begin{array}{lll}
(IP_j(u)) & \max & z_j(u) = \sum_{i \in M}(c_{ij} - u_i)x_{ij} - f_j y_j \\
 & \text{s.a.} & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\, i \in M \\
 & & x \in \mathbb{R}^{m \times n},\ y_j \in \mathbb{B}
\end{array}
$$

- Resolver $IP_j(u)$ por inspeção !

$$
z_j(u) = \max\{0, \sum_{i \in M} \max\{c_{ij} - u_i, 0\} - f_j\}
$$

- Exemplo: $m = 6$, $n = 5$ e $c = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

- para $f = (2,4,5,3,3)$ e $u = (5,6,3,2,5,4)$ a matriz de custos do problema lagrangiano torna-se:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & z_1(u) = z_3(u) = z_5(u) = 0 \\ & z_2(u) = 3 \\ & z_4(u) = 1 \\ & z(u) = \textstyle\sum_{j \in N} z_j(u) + \sum_{i \in M} u_i \\ & z(u) = 3 + 1 + 25 = 29. \end{aligned}$$

- Problema simétrico do caixeiro viajante (TSP):

$$
\begin{array}{lll}
(IP) & \min & z = \sum_{e \in E} c_e x_e \\
 & \text{s.a.} & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \ \forall\, i \in V, \qquad \leftarrow \text{dualizar para } i \neq 1 \\
 & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \ \forall\, 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\
 & & \left(\sum_{e \in E} x_e = |V| \right), \qquad x \in \mathbb{B}^{|E|}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(IP(u)) & \min & z = \displaystyle\sum_{(i,j) \in E, 1 < i < j \leq n} (c_{ij} - u_i - u_j) x_{ij} + \\
 & & \displaystyle\sum_{(1,j) \in E} (c_{1j} - u_j) x_{1,j} + 2 \sum_{i \in V - \{1\}} u_i \\
 & \text{s.a.} & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2, \\
 & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \ \forall\, 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\
 & & \left(\displaystyle\sum_{e \in E} x_e = |V| \right), \qquad x \in \mathbb{B}^{|E|}.
\end{array}
$$

- Como se resolve $IP(u)$? $IP(u)$ equivale a encontrar uma 1-árvore mínima para os custos lagrangianos.

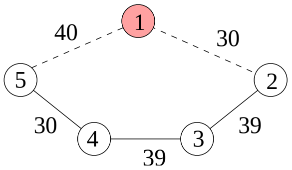
- Observação 1: o problema dual lagrangiano é de maximização.
- Observação 2: as restrições dualizadas são de igualdade. Logo, os multiplicadores de Lagrange são irrestritos em sinal.
- Exemplo: grafo completo com $n = 5$ vértices (K_5) com matriz de custos dada por

$$c = \begin{bmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ & - & 24 & 40 & 50 \\ & & - & 24 & 26 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$

- se $u_2 = u_4 = u_5 = 0$ e $u_3 = -15$, os custos lagrangianos são:

$$c = \begin{bmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ & - & 24 & 40 & 50 \\ & & - & 24 & 26 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix} \qquad \tilde{c} = \begin{bmatrix} - & 30 & 41 & 50 & 40 \\ & - & 39 & 40 & 50 \\ & & - & 39 & 41 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$

- 1-árvore ótima para $IP(u)$:



$$z(u) = 30 + 40 + 39 + 39 + 30 + 2\sum_{i=2}^{4} u_i$$

$$z(u) = 178 - 30 = 148 \leq z$$

Pela **Proposição 2** essa solução é ótima