Método Primal: Arredondamento

Arredondamento da Solução Primal

Problema COBERTURA POR VÉRTICES: Dados grafo $G = (V, E)$ e custos $c : V \to \mathbb{Q}_{\geq}$, encontrar $S \subseteq V$ tal que $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$ $\forall \{u, v\} \in E$ e $c(S)$ é mínimo.

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcll} \text{minimize} & cx & & & \\ \text{sujeito a} & x_i + x_j & \geq & 1 & \text{para cada } ij \text{ em } E\,, \\ & x_i & \geq & 0 & \text{para cada } i \text{ em } V\,. \end{array}
$$

MINCV-NT $(G = (V, E), c)$

1 seja $\hat{x}$ uma solução ótima racional de (P)

2 $S \leftarrow \{v \in V : \hat{x}_v \geq 1/2\}$

3 devolva S

Teorema: $\textsc{MinCV-NT}$ é uma 2-aproximação (Nemhauser,Trotter'75; Hochbaum'83).

Prova. $\textsc{MinCV-NT}$ produz uma cobertura de vértices:
$(S := \{v \in V : \hat{x}_v \geq 1/2\}$ e $x_i + x_j \geq 1 \quad \forall ij \in E) \Longrightarrow S$ é cobertura.

$$
\begin{aligned}
c(S) &= \sum_{i \in S} c_i \\
&\leq \sum_{i \in S} c_i 2\,\hat{x}_i \\
&= 2 \sum_{i \in S} c_i \hat{x}_i \\
&\leq 2 \sum_{i \in V} c_i \hat{x}_i \\
&= 2\, c\, \hat{x} \\
&\leq 2\,\mathrm{OPT}
\end{aligned}
$$

□

Generalização para Cobertura por Conjuntos

Problema Cobertura por Conjuntos: Dados conjunto E, subconjuntos $\mathcal{S}$ de E, custos $c(S) \in \mathbb{Q}_{\geq}$, $S \in \mathcal{S}$, encontrar cobertura $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ que minimiza $\sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.

$$
\begin{array}{llrcll}
 & \text{minimize} & cx & & & \\
(P) & \text{sob as restrições} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}_e} x_S & \geq & 1 & \text{para cada } e \text{ em } E\,, \\
 & & x_S & \geq & 0 & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S}\,.
\end{array}
$$

onde $\mathcal{S}_e = \{S \in \mathcal{S} : \; e \in S\}$

MinCC-Hochbaum $(E, \mathcal{S}, c)$

```
seja x̂ uma solução ótima racional de (P)
para cada e em E faça f_e ← |{S ∈ 𝒮 : e ∈ S}|
β ← max_{e∈E} f_e
𝒯 ← {S ∈ 𝒮 : x̂_S ≥ 1/β}
devolva 𝒯
```

Teorema: *O algoritmo* MinCC-Hochbaum *é uma β-aproximação polinomial para o* MinCC $(E, \mathcal{S}, c)$*, onde β é o número máximo de vezes que um elemento de E aparece em conjuntos de $\mathcal{S}$.*

Prova. O custo da cobertura $\mathcal{T}$ produzida pelo algoritmo é

$$
\begin{aligned}
c(\mathcal{T}) &= \sum_{S \in \mathcal{T}} c_S \\
&\leq \sum_{S \in \mathcal{T}} c_S \beta \hat{x}_S \\
&= \beta \sum_{S \in \mathcal{T}} c_S \hat{x}_S \\
&\leq \beta \, c \hat{x} \\
&\leq \beta \, \mathrm{OPT}(E, \mathcal{S}, c) \,,
\end{aligned}
$$

onde a primeira desigualdade vale pois $\beta \hat{x}_S \geq 1$ para todo S em $\mathcal{T}$. $\square$