Tratamento de problemas $\mathcal{NP}$-difíceis: Aproximações

- *Algoritmos aproximados* encontram uma solução **com garantia de qualidade** em tempo polinomial.
- Nomenclatura:

P	problema $\mathcal{NP}$-difícil
H	algoritmo aproximado
I	instância de P
$z^*(I)$	valor ótimo da instância I
$z^H(I)$	valor da solução obtida por H para a instância I

- *Aproximação absoluta*: para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ tem-se que

$$|z^*(I) - z^H(I)| \leq k, \text{ para todo } I.$$

- Exemplo 1: alocação de arquivos em discos (MFA).
  Dados n arquivos de tamanhos $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ e **dois** discos de capacidade L, qual o maior número de arquivos que podem ser armazenados nos discos ?
- *Teorema*: MFA $\in \mathcal{NP}$-completo. (**Exercício**)
- Algoritmo: supor que $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \ldots \leq \ell_n$.

```
Aprox-MFA(n, ℓ);
    L′ ← L;    j ← 1;
    Enquanto L′ ≥ ℓ_j faça
        L′ ← L′ − ℓ_j;    Colocar(j, 1);    j++;
    fim-enquanto;
    L′ ← L;
    Enquanto L′ ≥ ℓ_j faça
        L′ ← L′ − ℓ_j;    Colocar(j, 2);    j++;
    fim-enquanto;
Retornar j − 1.
```

Aproximação Absoluta

Teorema: $|z^*(I) - z^H(I)| \leq 1$.

Prova: Seja p o número de arquivos que o algoritmo `Aprox-MFA` consegue armazenar em um grande disco com capacidade $2L$. Além disso, seja $j = \text{argmax}\{\sum_{i=1}^{j} \ell_i \leq L\} \leq p$.

1. $p \geq z^*(I)$; (a)
2. $\sum_{i=1}^{p} \ell_i \leq 2L$; (b)
3. $\sum_{i=j+1}^{p-1} \ell_i \leq \sum_{i=j+2}^{p} \ell_i \leq L$, devido a (b) e à definição de j que implica que $\sum_{i=1}^{j+1} \ell_i > L$. (c)

$$\ldots \overset{\text{(c)}}{\Longrightarrow} z^H(I) \geq p - 1 \overset{\text{(a)}\wedge\text{(c)}}{\Longrightarrow} z^H(I) \geq z^*(I) - 1. \qquad \square$$

Exercício: dê um exemplo de uma instância onde `Aprox-MFA` *erra o valor ótimo por uma unidade.*

Aproximação Absoluta

- ▷ Exemplo 2: coloração de *grafos planares* (CGP).
- ▷ Resultados conhecidos:
  - ∘ CGP $\in \mathcal{NP}$-completo.
  - ∘ Todo grafo planar tem pelo menos um vértice de grau ≤ 5.
  - ∘ Um *grafo é bipartido* se e somente se ele não tem ciclos ímpares.

```
6-cores(G);     (* G = (V, E) *)
    Se |V| = 0 então Retornar 0;  Se |E| = 0 então Retornar 1;
    Se G é bipartido então Retornar 2;
    se não
        Escolher v com grau(v) ≤ 5;   G' ← G − v;   k ← 6-cores(G');
        Seja x ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6} uma cor diferente daquela dos vizinhos de v;
        Se (x > k) então  k ← k + 1;  x ← k;  fim-se;
        cor[v] ← x;
    fim-se
Retornar  k.
```

Aproximação Absoluta

- **Teorema**: $|z^*(I) - z^H(I)| \leq 3$.
  Prova: Se $|V| = 0$, $|E| = 0$ ou o grafo é bipartido então a coloração feita por `6-cores` é ótima e o resultado é imediato. Caso contrário, G tem pelo menos um *ciclo ímpar*. Logo qualquer coloração precisará de pelo menos três cores. *(justifique !)*
  Como o número de cores usadas por `6-cores` é ≤ 6 e a solução ótima requer pelo menos 3 cores, tem-se que

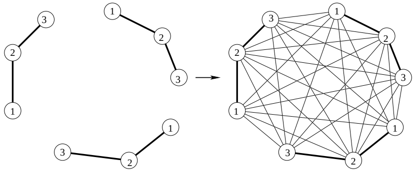
$$|z^*(I) - z^H(I)| \leq |3 - 6| = 3.$$

$\square$

- **Observações**:
  - Todo grafo planar admite uma 4-coloração.
  - São poucos problemas que têm aproximação absoluta.

▷ **Teorema**: Não existe uma aproximação absoluta para `CLIQUE` com complexidade polinomial a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Prova: Suponha que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ e que existe um algoritmo polinomial H para `CLIQUE` tal que $|z^*(I) - z^H(I)| \leq k \in \mathbb{Z}_+$. Seja G^{k+1} o grafo composto de $k+1$ cópias de G mais todas as arestas ligando pares de vértices em diferentes cópias.



Observação: se α é o tamanho da maior clique de G então a maior clique de G^{k+1} tem $\alpha(k+1)$ vértices.

- *Prova*: (cont.)
  Executando-se H para G^{k+1} tem-se que

$$z^*(G^{k+1}) - z^H(G^{k+1}) \leq k \Longrightarrow z^H(G^{k+1}) \geq (k+1)z^*(G) - k.$$

Se C é a clique encontrada por H em G^{k+1}, existe uma cópia de G tal que $C' = V \cap C$ e $|C'| \geq |C|/(k+1)$. Logo

$$|C'| \geq \frac{(k+1)z^*(G) - k}{k+1} = z^*(G) - \frac{k}{k+1}.$$

Portanto, $|C'| \geq z^*(G)$, i.e., C' é uma clique máxima de G.
Absurdo ! $\square$

Resultados Negativos: **Sensibilidade a escala**

Problema da Mochila

Problema MOCHILA: Dados itens $S = \{1, \ldots, n\}$ com peso v_i e tamanho s_i inteiros, $i = 1, \ldots, n$, e inteiro B, encontrar $S' \subseteq S$ que maximiza $\sum_{i \in S'} v_i$ tal que $\sum_{i \in S'} s_i \leq B$.

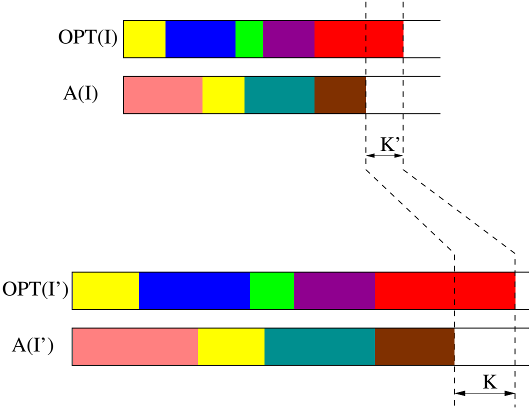
Teorema: *Se $P \neq NP$ então não existe algoritmo de tempo polinomial com aproximação absoluta k para o problema da Mochila, para qualquer k fixo.*

Prova. Suponha existir algoritmo A e k tal que

$$|\mathrm{OPT}(I) - A(I)| \leq k,$$

e k limitado por polinômio de n.

Seja $I := \{S = (1, \ldots, n), v = (v_1, \ldots, v_n), (s_1, \ldots, s_n), B\}$ uma instância qualquer.
Seja $I' := \{S = (1, \ldots, n), v = (v'_1, \ldots, v'_n), (s_1, \ldots, s_n), B\}$ uma instância onde $v'_i := (k + 1) \cdot v_i$.



$$(k+1)\mathrm{OPT}(I) = \mathrm{OPT}(I')$$

Seja *Sol* a solução de *I* correspondente ao gerado por *A* em I'.

$$|\mathrm{OPT}(I') - A(I')| \leq k$$

$\Longrightarrow$

$$|(k+1) \cdot \mathrm{OPT}(I) - (k+1)Sol| \leq k$$

$\Longrightarrow$

$$(k+1) \cdot |\mathrm{OPT}(I) - Sol| \leq k.$$

$\Longrightarrow$

$$|\mathrm{OPT}(I) - Sol| \leq \frac{k}{k+1}.$$

$\Longrightarrow$

$$|\mathrm{OPT}(I) - Sol| \leq 0.$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{OPT}(I) = Sol$$

□