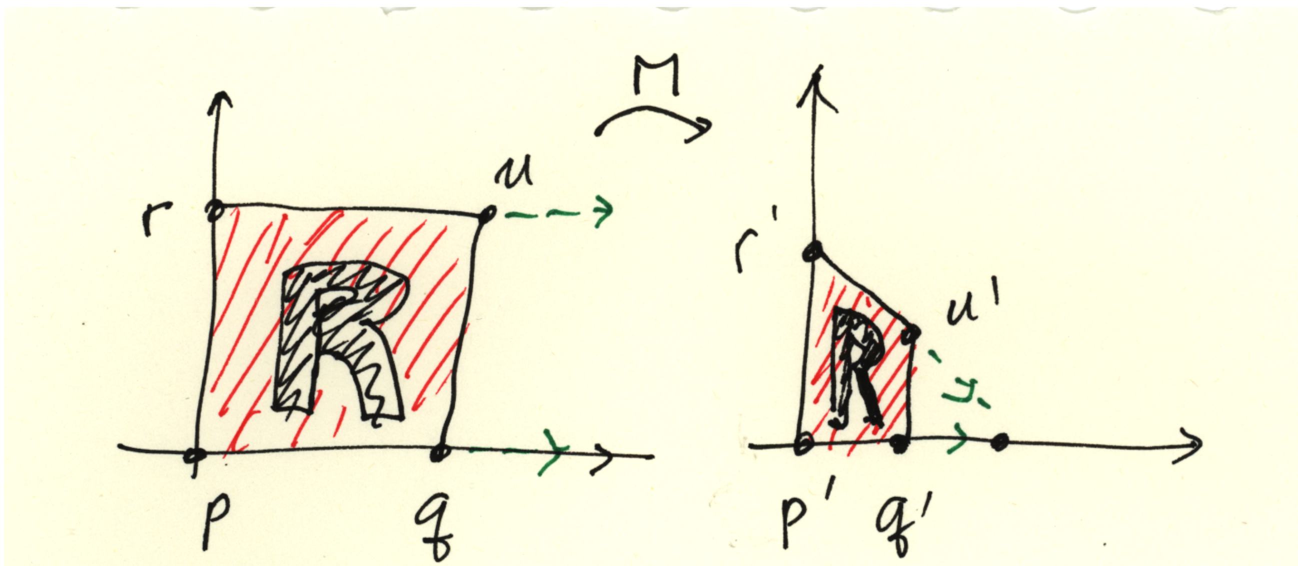
Se a primeira coluna da matriz $\widehat{M}$ não é $1, 0, 0$,
a transformação M mstura pontos finitos e infinitos, e não preserva paralelismo:

$$
\begin{aligned}
[w, x, y]M &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\; w + x,\; x,\; y \;\right]
\end{aligned}
$$

Em coordenadas cartesianas:

$$
(X, Y)M \;=\; [1, X, Y]M \;=\; [1{+}X, X, Y] = \left(\frac{X}{1+X}, \frac{Y}{1+X}\right)
$$

$$
\begin{array}{lcccc}
pM & = & (0,0)M & = & [\ 1\ 0\ 0\ ] \\
qM & = & (1,0)M & = & [\ 1\ 1\ 0\ ] \\
rM & = & (0,1)M & = & [\ 1\ 0\ 1\ ] \\
uM & = & (1,1)M & = & [\ 1\ 1\ 1\ ]
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{lcccc}
= & [\ 1\ 0\ 0\ ] & = & (0,0) \\
= & [\ 2\ 1\ 0\ ] & = & (1/2,0) \\
= & [\ 1\ 0\ 1\ ] & = & (0,1) \\
= & [\ 2\ 1\ 1\ ] & = & (1/2,1/2)
\end{array}
$$


M
u
r
p
q
r'
u'
p'
q'

O *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$ consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$
sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$
são o mesmo ponto se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$, $y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Planos: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$
são o mesmo plano se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$ e $\mathcal{Z}'' = \alpha \mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

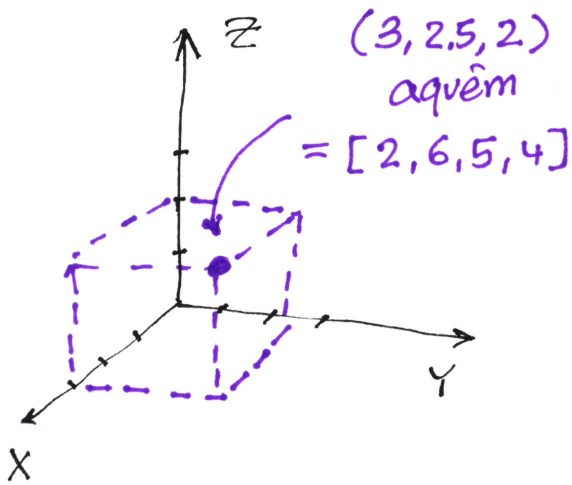
Toda a geometria projetiva orientada trdimensional segue destas definições.

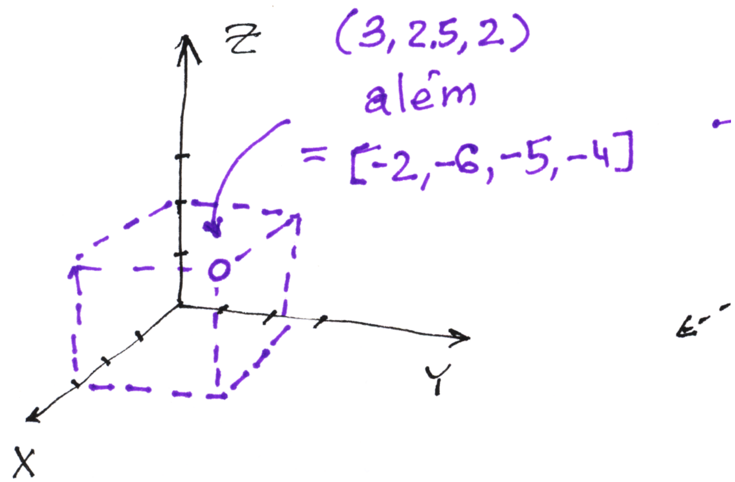
As coordenadas homogêneas de um ponto no espaço são quaisquer quatro números reais $[w, x, y, z]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$, $Y = y/w$ e $Z = z/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y, Z), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY, wZ]$ para qualquer $w > 0$. Em particular, $[1, X, Y, Z]$.

Convenção:
Cartesianas: parênteses $(, ,)$ e maiúsculas $X, Y, Z, \ldots$
Homogêneas: colchetes $[, , ,]$ e minúsculas $w, x, y, z, \ldots$

Coordenadas homogêneas no espaço





$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5, 2.0) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5, 2.0] \\
&= [2, 6, 5, 4] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025, 0.020] \\
&= [12, 36, 30, 24] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^3$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ N & P & Q & R \end{bmatrix} \\
&= [\ Aw+Ex+Iy+Nz, \\
&\qquad Bw+Fx+Jy+Pz, \\
&\qquad Cw+Gx+Ky+Qz, \\
&\qquad Dw+Hx+Ly+Rz\ ]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y,z]) = [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\; w - z,\;\; 4w - 3y - 3z,\;\; 2w + 2x,\;\; x \;\right]$$

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^3$ é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito:
Se $M([w,x,y,z]) = [w',x',y',z']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

não altera w

destino da origem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & A & B & C \\ 0 & D & E & F \\ 0 & G & H & I \end{bmatrix}$$

imagem do VETOR (1,0,0)

imagem do VETOR (0,1,0)

imagem do VETOR (0,0,1)

Em coordenadas cartesianas:

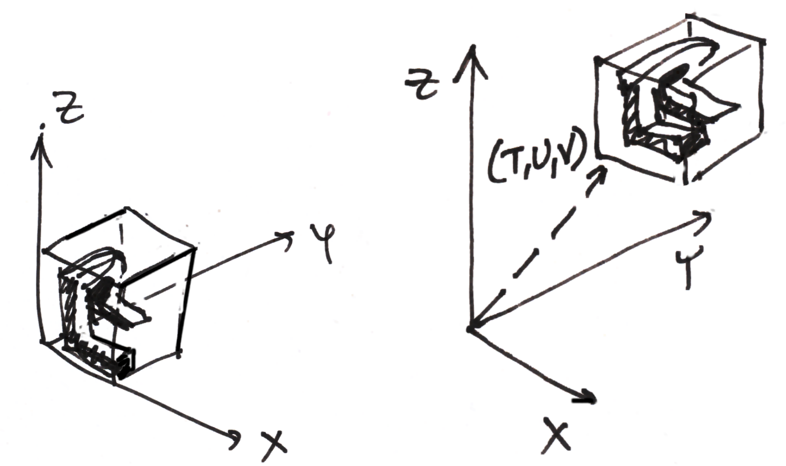
$$M((X,Y,Z)) = (X,Y,Z)\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} + (T,U,V)$$

Transformações afins: Translação

Translação pelo vetor cartesiano (T, U, V):

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z] \begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; Tw+x,\; Uw+y \;\; Vw+y \;\right]$$

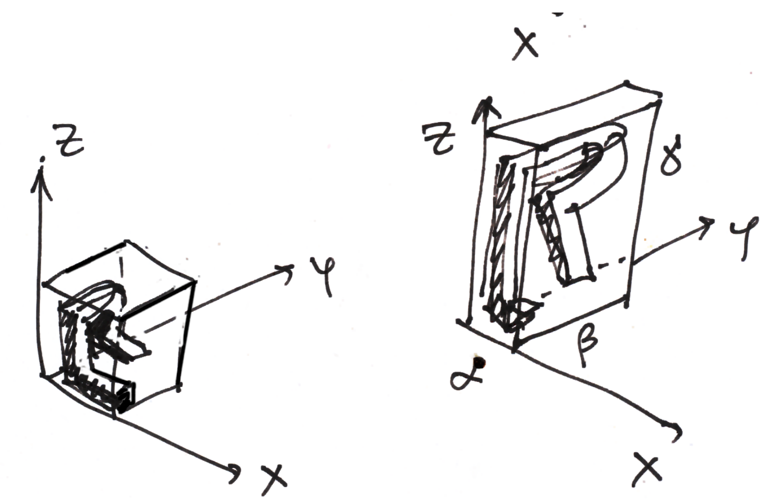
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, T+X, U+Y, V+Z] = (X,Y,Z) + (T,U,V)$$



Mudança de escala por fatores α em X, β em Y, γ em Z:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix} \;=\; [\;w,\;\alpha x,\;\beta y,\;\gamma z\;]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,\alpha X,\beta Y,\gamma Z] = (\alpha X,\beta Y,\gamma Z)$$

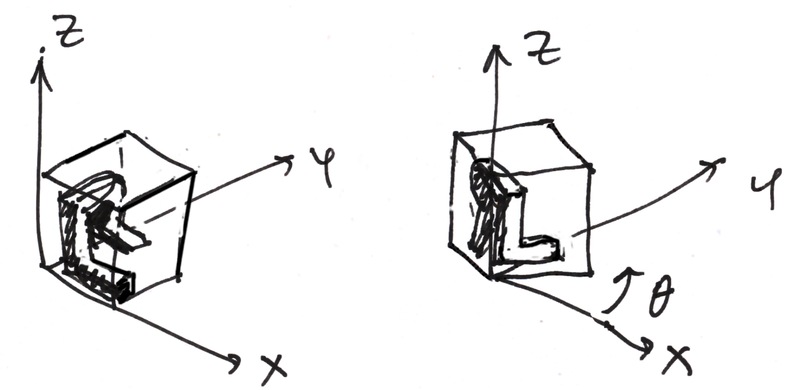


Rotação anti-horária por θ radianos em torno do eixo Z:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; cx - sy,\; sx + cy,\; z \;\right]$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, cX - sY, sX - cY, Z] = (cX - sY, sX - cY, Z)$$



Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos)
em torno do eixo Z:

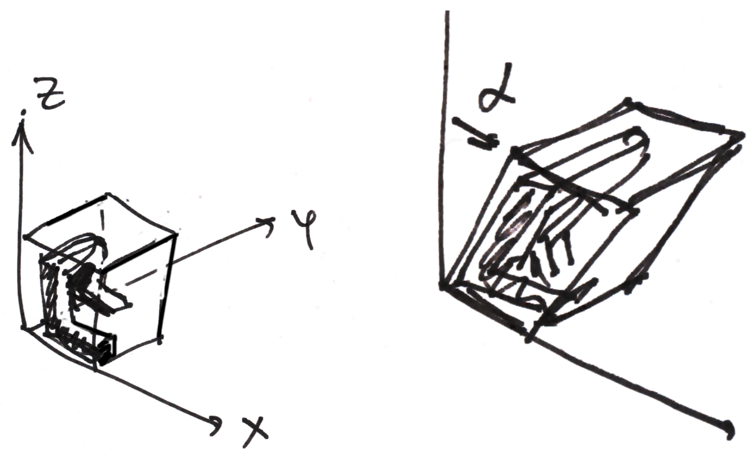
$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; [\;w,\; -y,\; x,\; z\;]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-Y,+X,Z] = (-Y,+X,Z)$$

Cisalhamento na direção X proposcional a Z com fator α:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0 & 1\end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; x+\alpha z,\; y,\; z\;\right]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, X+\alpha Z, Y, Z] = (X+\alpha Z, Y, Z)$$



Espelhamento na direção X pelo plano YZ:

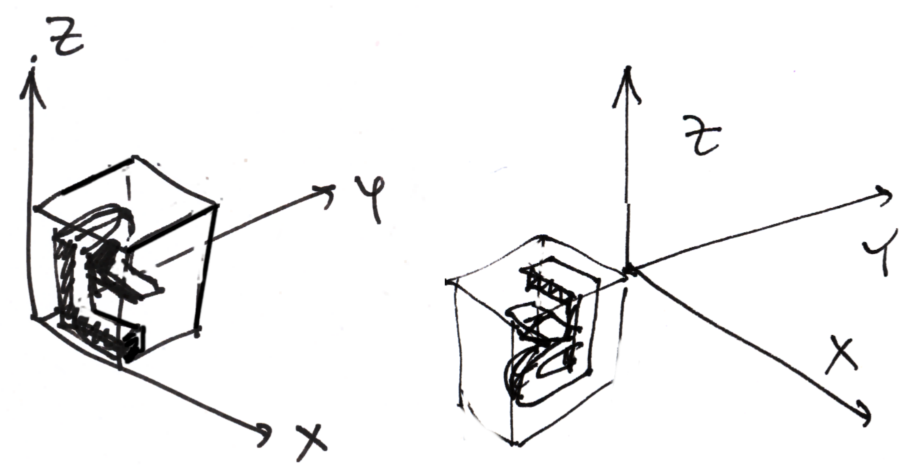
$$\begin{aligned} M([w,x,y,z]) \;&=\; [w,x,y,z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\ &=\; \left[\, w,\; -x,\; y,\; z \,\right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,Y,Z] = (-X,Y,Z)$$

Espelhamento pela origem:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \;=\; [\;w,\;-x,\;-y,\;-z\;]$$

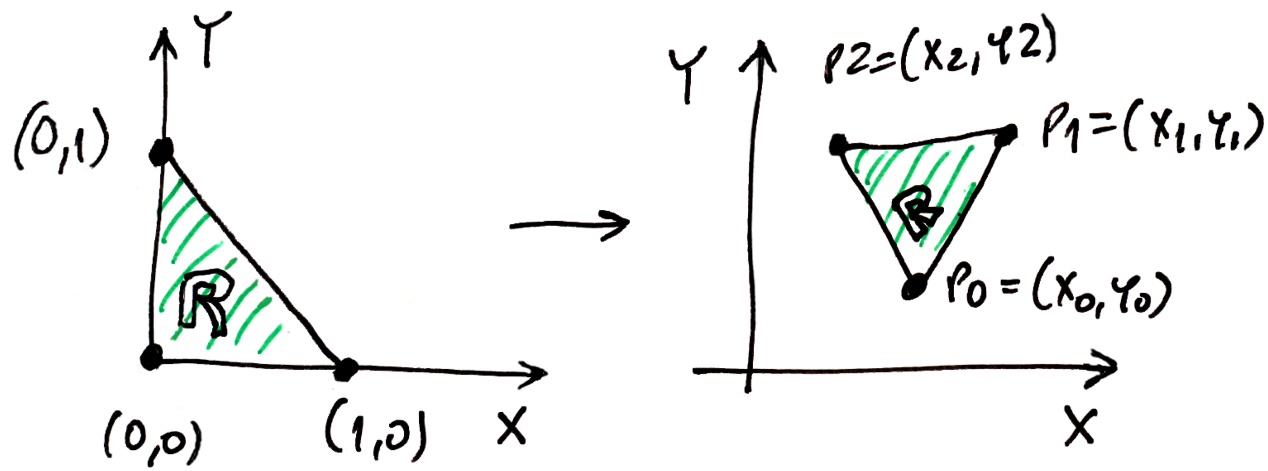
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,-Y,-Z] = (-X,-Y,-Z)$$



Transformação afim que leva o trângulo canônico
$K = \mathsf{S}((0,0),\,(1,0),\,(0,1))$
para um trângulo qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0,Y_0),\,(X_1,Y_1),\,(X_2,Y_2))$:

$$\begin{array}{rcl} M((0,0)) & = & [\;1\;0\;0\;] \\ M((1,0)) & = & [\;1\;1\;0\;] \\ M((0,1)) & = & [\;1\;0\;1\;] \end{array} \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix}$$

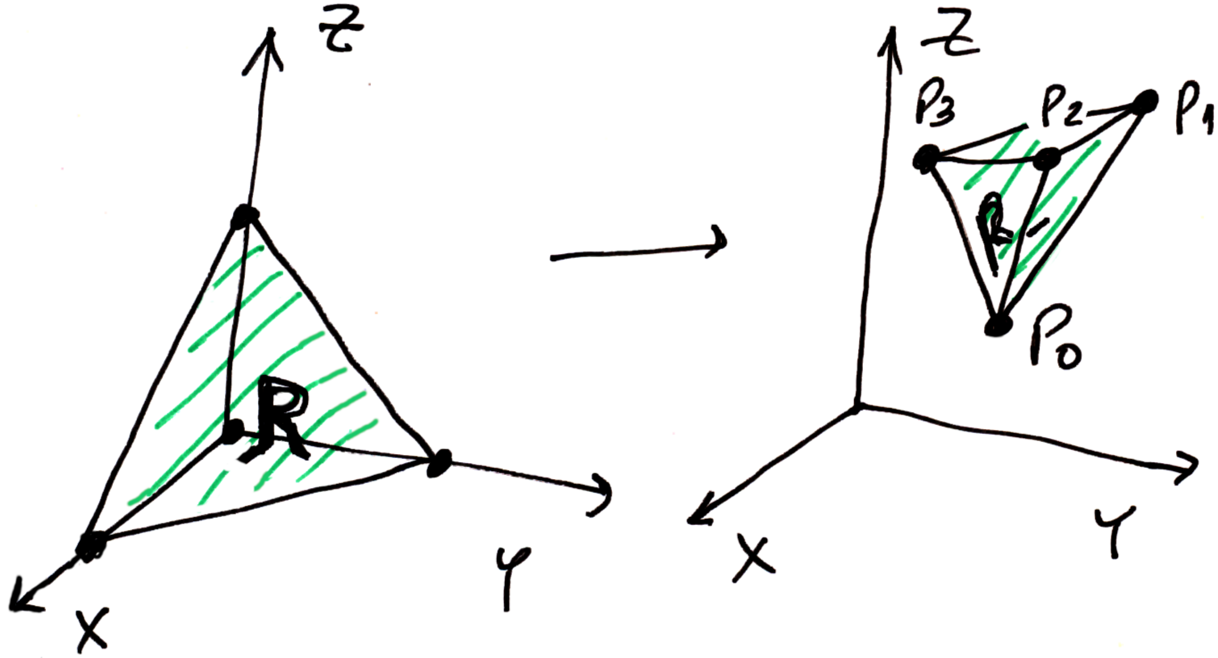
$$\begin{array}{l} = [\;1\;X_0\;Y_0\;] \\ = [\;1\;X_1\;Y_1\;] \\ = [\;1\;X_2\;Y_2\;] \end{array}$$


Y
(0,1)
R
(0,0)
(1,0)
X
Y
p2=(x2,y2)
P1=(x1,y1)
R
P0 = (x0,y0)
X

Transformação afim que leva o tetraedro canônico
$K = \mathsf{S}((0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\,(0,0,1))$
para um tetraedro qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0,Y_0,Z_0),\ (X_1,Y_1,Z_1),\ (X_2,Y_2,Z_2)\,(X_3,Y_3,Z_3))$:

$$
\begin{array}{rcl}
M((0,0,0)) & = & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
M((1,0,0)) & = & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
M((0,1,0)) & = & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
M((0,0,1)) & = & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & X_0 & Y_0 & Z_0 \\
0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \\
0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 & Z_2 - Z_0 \\
0 & X_3 - X_0 & Y_3 - Y_0 & Z_3 - Z_0
\end{bmatrix}
$$

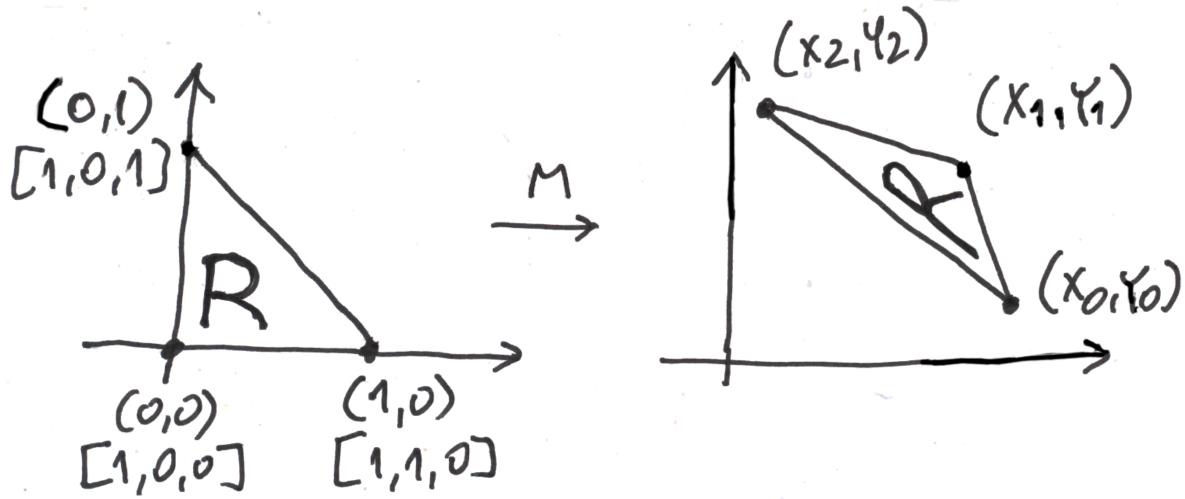
$$
\begin{array}{l}
= \left[\begin{array}{cccc} 1 & X_0 & Y_0 & Z_0 \end{array}\right] \\
= \left[\begin{array}{cccc} 1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \end{array}\right] \\
= \left[\begin{array}{cccc} 1 & X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array}\right] \\
= \left[\begin{array}{cccc} 1 & X_3 & Y_3 & Z_3 \end{array}\right]
\end{array}
$$


Z
R
X
Y
Z
P_3
P_2
P_1
R'
P_0
X
Y

Transformação afim que leva um trângulo genérico
$T' = \mathsf{S}((X'_0, Y'_0), (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X''_0, Y''_0), (X''_1, Y''_1), (X''_2, Y''_2))$:

$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T''.


(0,1)
[1,0,1]
R
(0,0)
[1,0,0]
(1,0)
[1,1,0]
M
(x2,y2)
(x1,y1)
R
(x0,y0)

Transformação afim que leva um tetraedro genérico
$T' = \mathsf{S}((X_0', Y_0', Z_0'), (X_1', Y_1', Z_1'), (X_2', Y_2', Z_2'), (X_3', Y_3', Z_3'))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X_0'', Y_0'', Z_0''), (X_1'', Y_1'', Z_1''), (X_2'', Y_2'', Z_2''), (X_3'', Y_3'', Z_3''))$:

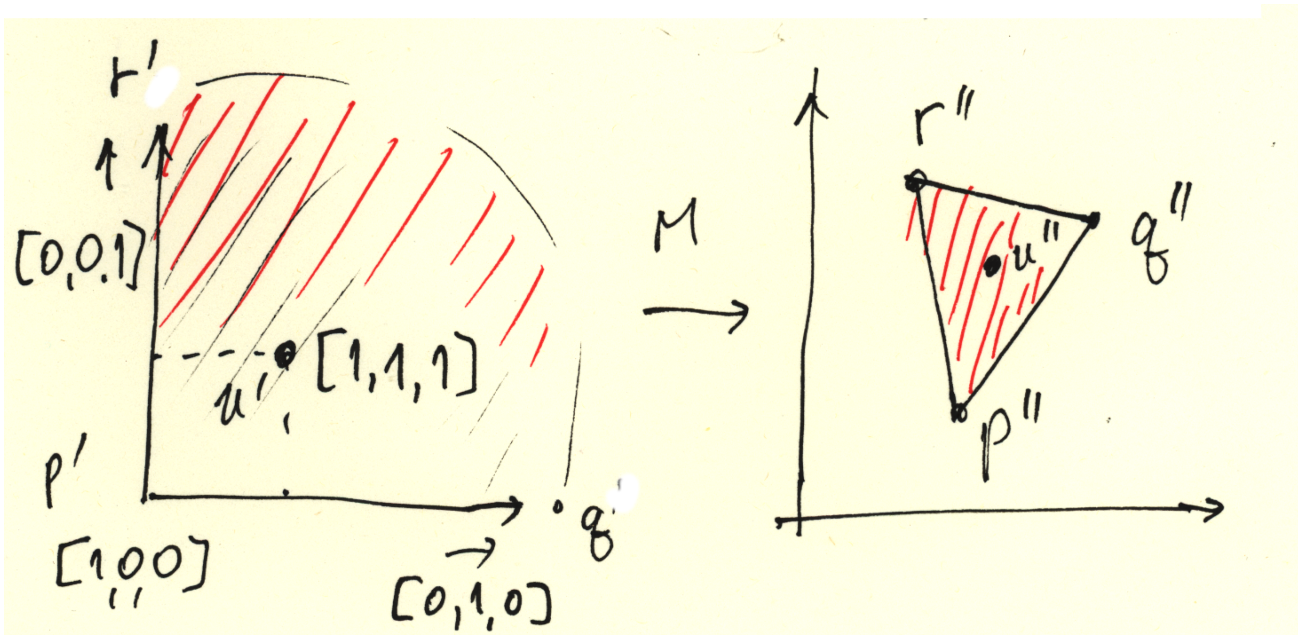
$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T''.

Dados 4 pontos p, q, r, u onde u está dentro do triângulo $\mathsf{S}(p, q, r)$, existe uma única transformação projetiva que leva os cantos do primeiro quadrante para p, q, r, e o ponto $[1, 1, 1, 1]$ para u.

Queremos:

$$\begin{array}{c} [\ 1\ 0\ 0\ ] \\ [\ 0\ 1\ 0\ ] \\ [\ 0\ 0\ 1\ ] \\ [\ 1\ 1\ 1\ ] \end{array} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ = \end{array} \begin{array}{c} [\ \alpha\, p.w \quad \alpha\, p.x \quad \alpha\, p.y\ ] \\ [\ \beta\, q.w \quad \beta\, q.x \quad \beta\, q.y\ ] \\ [\ \gamma\, r.w \quad \gamma\, r.x \quad \gamma\, r.y\ ] \\ [\ u.w \quad u.x \quad u.y\ ] \end{array}$$


r'
[0,0,1]
[1,1,1]
u'
p'
[1,0,0]
q'
[0,1,0]
M
r''
q''
u''
p''

Logo M é

$$M = \begin{bmatrix} \alpha p.w & \alpha p.x & \alpha p.y \\ \beta q.w & \beta q.x & \beta q.y \\ \gamma r.w & \gamma r.x & \gamma r.y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p.w & p.x & p.y \\ q.w & q.x & q.y \\ r.w & r.x & r.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N$$

Resta determinar α, β, e γ para que a quarta equação seja satisfeita.

A quarta equação é

$$[\,1,\,1,\,1\,]\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix} N \;=\; [\,u.w,\,u.x,\,u.y\,]$$

ou seja

$$[\,\alpha,\,\beta,\,\gamma\,] \;=\; [\,u.w,\,u.x,\,u.y\,]N^{-1}$$

Transformação afim que leva o primeiro octante do aquém

$Q = \mathsf{S}([1,0,0,0],\ [0,1,0,0),\ [0,0,1,0]\,[0,0,0,1])$

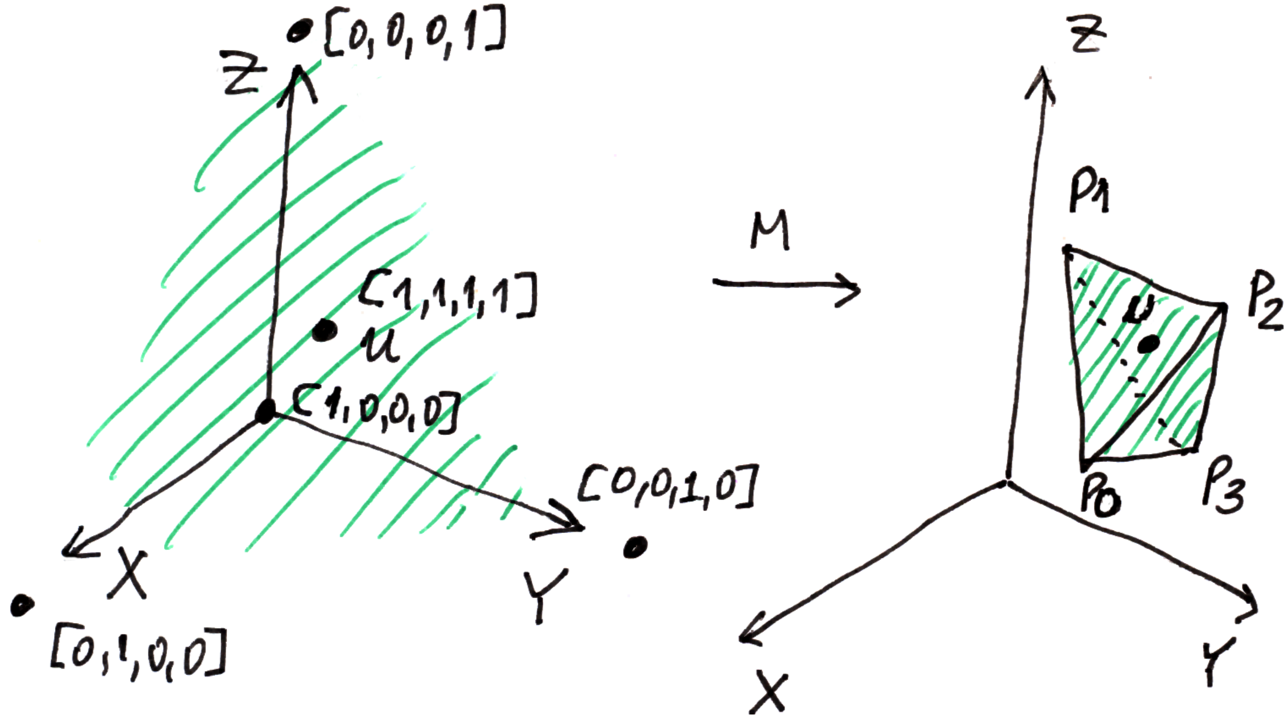
para um tetraedro qualquer

$T = \mathsf{S}([w_0,x_0,y_0,z_0],\ [w_1,x_1,y_1,z_1],\ [w_2,x_2,y_2,z_2]\,[w_3,x_3,y_3,z_3])$

e o *ponto unitário* $\mathbf{1} = [1,1,1,1]$ para um ponto $u = [w_u,x_u,y_u,z_u]$ no interior de T:

$$
\begin{array}{rcl}
M([1,0,0,0]) & = & [\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]\,M \\
M([0,1,0,0]) & = & [\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\,M \\
M([0,0,1,0]) & = & [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ]\,M \\
M([0,0,0,1]) & = & [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]\,M \\
M([1,1,1,1]) & = & [\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ ]\,M
\end{array}
$$

$$
= \quad
\begin{array}{l}
= [\ \alpha\,w_0 \quad \alpha\,x_0 \quad \alpha\,y_0 \quad \alpha\,z_0\ ] \\
= [\ \beta\,w_1 \quad \beta\,x_1 \quad \beta\,y_1 \quad \beta\,z_1\ ] \\
= [\ \gamma\,w_2 \quad \gamma\,x_2 \quad \gamma\,y_2 \quad \gamma\,z_2\ ] \\
= [\ \delta\,w_3 \quad \delta\,x_3 \quad \delta\,y_3 \quad \delta\,z_3\ ] \\
= [\ \ w_u \quad\ \ x_u \quad\ \ y_u \quad\ \ z_u\ ]
\end{array}
$$


[0,0,0,1]
Z
[1,1,1,1]
u
[1,0,0,0]
[0,0,1,0]
X
Y
[0,1,0,0]
M
Z
P1
P2
u
P3
P0
X
Y

Logo M é

$$M = \begin{bmatrix} \alpha\, w_0 & \alpha\, x_0 & \alpha\, y_0 & \alpha\, z_0 \\ \beta\, w_1 & \beta\, x_1 & \beta\, y_1 & \beta\, z_1 \\ \gamma\, w_2 & \gamma\, x_2 & \gamma\, y_2 & \gamma\, z_2 \\ \delta\, w_3 & \delta\, x_3 & \delta\, y_3 & \delta\, z_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} N$$

Resta determinar α, β, γ e δ para que a quinta equação seja satisfeita.

A quinta equação é

$$[1,\,1,\,1,\,1]\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta\end{bmatrix} N \;=\; [w_u,\,x_u,\,y_u,\,z_u]$$

ou seja

$$[\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta] \;=\; [w_u,\,x_u,\,y_u,\,z_u]N^{-1}$$

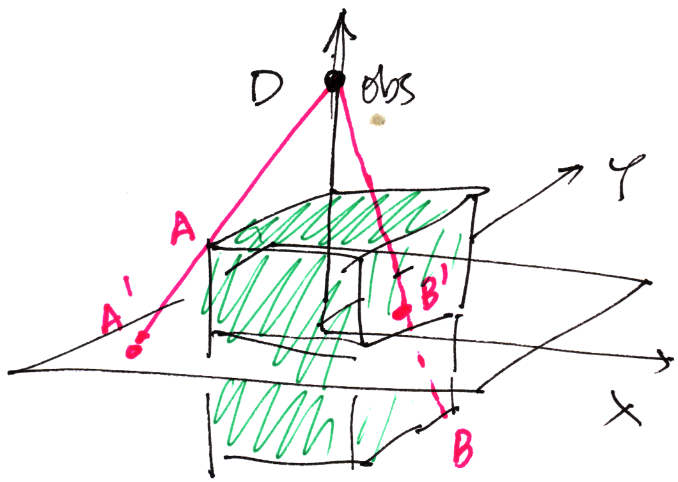
A trasfomação de perspectiva é usada para produzir imagens planas de cenas tridimensionais:

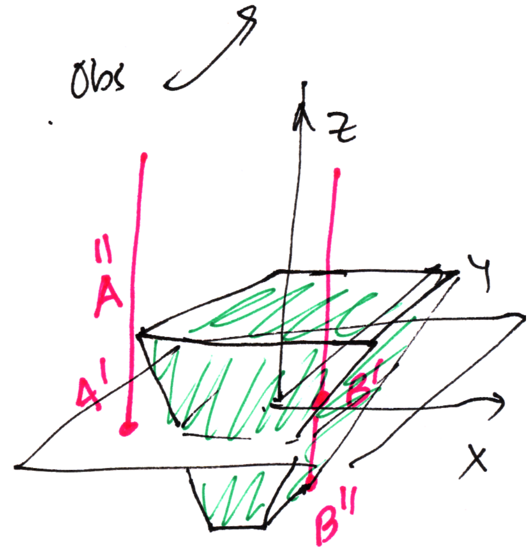
$$[w,x,y,z]M = [w,x,y,z]\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ -1 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

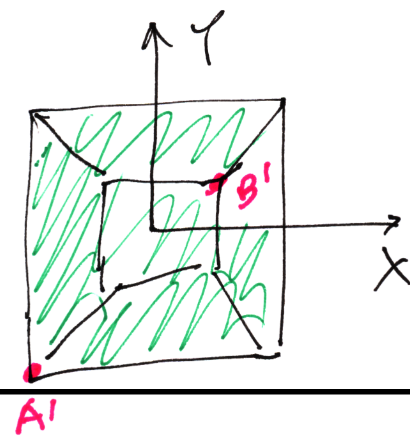
$$= \left[\ w - Dz,\ x,\ y,\ z\ \right]$$

Em coordenadas cartesianas:

$$M((X,Y,Z)) = [1,X,Y,Z]M = [D{-}Z, DX, DY, DZ] = \frac{1}{1 - Z/D}$$


D
obs
Y
A
A'
B'
B
X

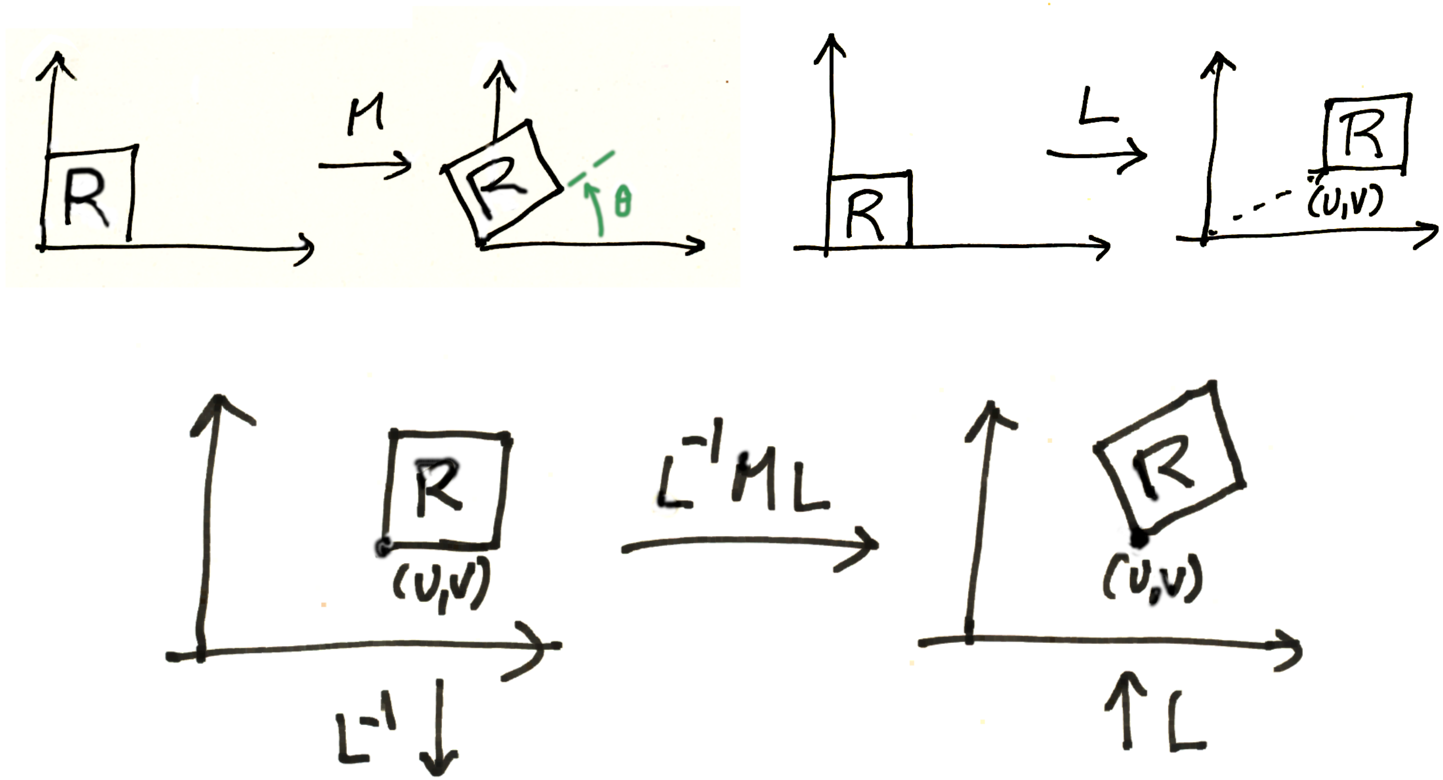

obs
Z
Y
A''
A'
B'
X
B''


Y
B'
X
A'

A *conjugada de* uma transformação projetiva M *por* outra transformação L é a transformação $L^{-1}ML$.

Intuitivamente, $L^{-1}ML$ tem o efeito de M, mas no plano $\mathbb{T}^2$ transformado por L.

Por exemplo, se M é a rotação de 30 graus em torno da origem, e L é a translação que leva a origem para (U, V), então $L^{-1}ML$ é uma rotação de 30 graus emtorno de (U, V).


R
M
R
θ
R
L
R
(u,v)
R
(u,v)
$L^{-1}ML$
R
(u,v)
L^{-1}
L