O plano projetivo orientado

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$
sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$
são o mesmo ponto se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.
$\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y] \neq [w, x, y]$

Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$
são a mesma reta se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.
$\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle \neq \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \\ &= [\, Aw + Dx + Gy, \\ &\qquad Bw + Ex + Hy, \\ &\qquad Cw + Fx + Iy \,] \end{aligned}$$

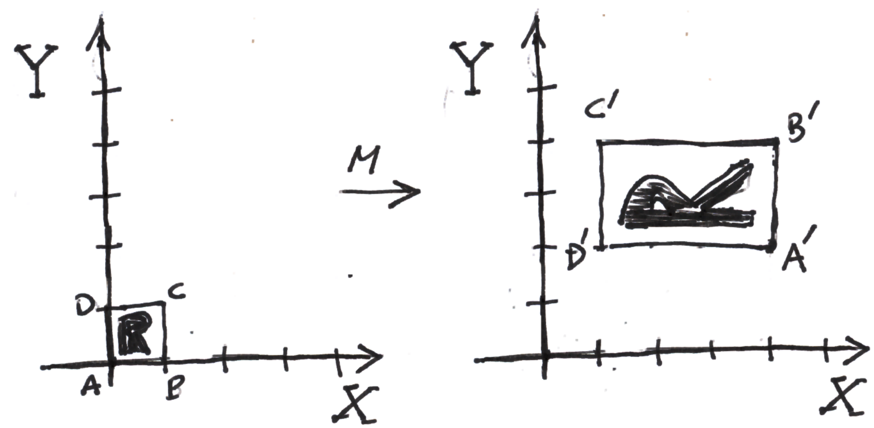
Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\; w,\; 4w-3y,\; 2w+2x \;]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y]) \;=\; \left[\; w,\; 4w-3y,\; 2w+2x \;\right]$$

$M(A) = M([1,0,0]) = [1,4,2] = A'$
$M(B) = M([1,1,0]) = [1,4,4] = B'$
$M(C) = M([1,1,1]) = [1,1,4] = C'$
$M(D) = M([1,0,1]) = [1,1,2] = D'$



Propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Só é válida se a matriz 3×3 $\widehat{M}$ tem determinante não nulo.
- $M(p)$ é definida para todo ponto p.
- $M(p)$ é o mesmo ponto de $\mathbb{T}^2$ quaisquer que sejam as coordenadas homogêneas escolhidas para p.
- M tem uma transformação inversa M^{-1}, tal que $M^{-1}(M(p)) = M(M^{-1}(p))$ para todo p.
- A matriz de M^{-1} é a inversa da matriz de M.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- M preserva colinearidade: $M(p), M(q), M(r)$ são colineares se e somente se p, q, r são colineares.
- M preserva segmentos: a imagem de $\mathsf{S}(p, q)$ sob M é $\mathsf{S}(M(p), M(q))$.
- Idem para triângulos e conjutos convexos em geral.
- A transformação M não se altera se a matriz $\widehat{M}$ for multiplicada por qualquer $\alpha > 0$.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for positivo, M sempre preserva a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = \Delta(p, q, r)$.
- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for negativo, M sempre inverte a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = -\Delta(p, q, r)$.

A primeira linha da matriz $\widehat{M}$ é para onde vai a origem do aquém:

para onde vai a origem do aquém

$$[1,0,0]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = [A,B,C]$$

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^2$ é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito.

Ou seja, se $M([w,x,y]) = [w',x',y']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

sempre

para onde vai a origem do aquém

$$[w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = [w,\ U + Ax + Cy,\ V + Bx + Dy]$$

transformação linear do $\mathbb{R}^2$

Translação pelo vetor cartesiano (U, V):

$$M([w, x, y]) = [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\; w,\ Uw + x,\ Vw + y \;\right]$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, U{+}X, V{+}Y] = (X, Y){+}(U, V)$$

Mudança de escala por fatores α em X e β em Y:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \\ &= [\ w,\ \alpha x,\ \beta y\ ] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,\alpha X,\beta Y] = (\alpha X,\beta Y)$$

Rotação anti-horária por θ radianos:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ cx - sy,\ sx + cy\ \right] \end{aligned}$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$\begin{aligned} M((X,Y)) = M([1,X,Y]) &= [1, cX - sY, sX + cY] \\ &= (cX - sY, sX + cY) \end{aligned}$$

Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos):

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\ w,\ -y,\ x\ ]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-Y,+X] = (-Y,+X)$$

Cisalhamento na direção X proposcional a Y com fator α:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\ w,\ x+\alpha y,\ y\ ]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1, X+\alpha Y, Y] = (X+\alpha Y, Y)$$

Espelhamento na direção X pelo eixo Y:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\ w,\ -x,\ y\ \right]
\end{aligned}
$$

$$
M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,Y] = (-X,Y)
$$

Rotaão por 180° (π radianos), ou espelhamento pela origem:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\ w,\ -x,\ -y\ \right]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,-Y] = (-X,-Y)$$

Composição de transformações projetivas M e Q aplicadas nessa ordem:

$$\begin{aligned} Q(M([w,x,y])) &= \left([w,x,y]\left[\widehat{M}\right]\right)\left[\widehat{Q}\right] \\ &= [w,x,y]\left(\left[\widehat{M}\right]\left[\widehat{Q}\right]\right) \end{aligned}$$

Por conta dessa fórmula, vamos escrever a composição na ordem de aplicação, ou seja "MQ" (em vez de $Q \circ M$ ou QM).

Então $p(MQ) = (pM)Q = pMQ$ para todo ponto p de $\mathbb{T}^2$.

Transformação afim que leva o trângulo canônico
$K = \mathsf{S}((0,0),\, (1,0),\, (0,1))$
para um trângulo qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0,Y_0),\, (X_1,Y_1),\, (X_2,Y_2))$:

$$\begin{array}{rcl} M((0,0)) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M((1,0)) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ M((0,1)) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} = \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Transformação afim que leva um trângulo genérico
$T' = \mathsf{S}((X'_0, Y'_0), (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X''_0, Y''_0), (X''_1, Y''_1), (X''_2, Y''_2))$:

$$M = A^{-1}B$$

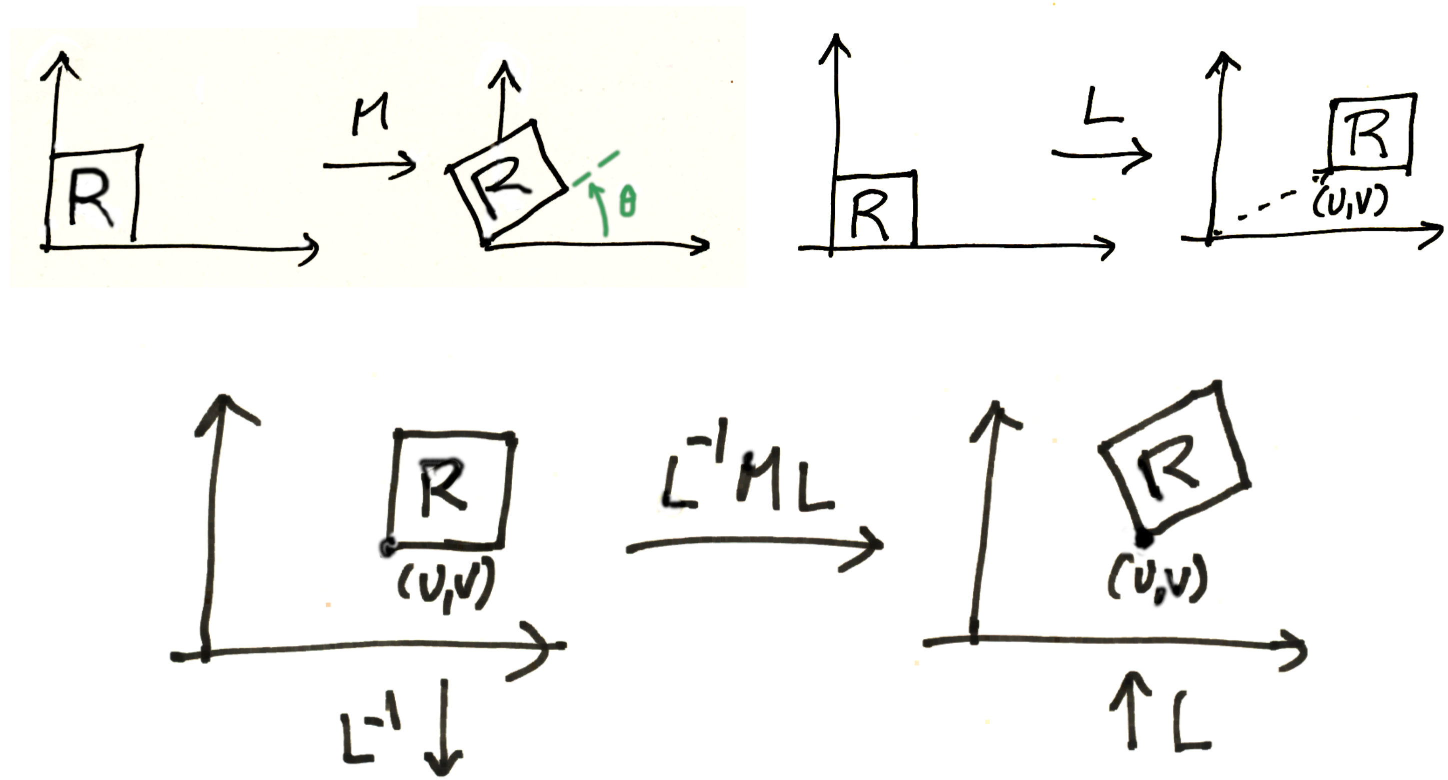
onde A leva K para T' e B leva K para T''.

A *conjugada de* uma transformação projetiva M *por* outra transformação L é a transformação $L^{-1}ML$.

Intuitivamente, $L^{-1}ML$ tem o efeito de M, mas no plano $\mathbb{T}^2$ transformado por L.

Por exemplo, se M é a rotação de 30 graus em torno da origem, e L é a translação que leva a origem para (U, V), então $L^{-1}ML$ é uma rotação de 30 graus emtorno de (U, V).

Conjugação de transformações



Se a primeira coluna da matriz $\widehat{M}$ não é $1, 0, 0$,
a transformação M mstura pontos finitos e infinitos, e não preserva paralelismo:

$$[w, x, y]M = [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

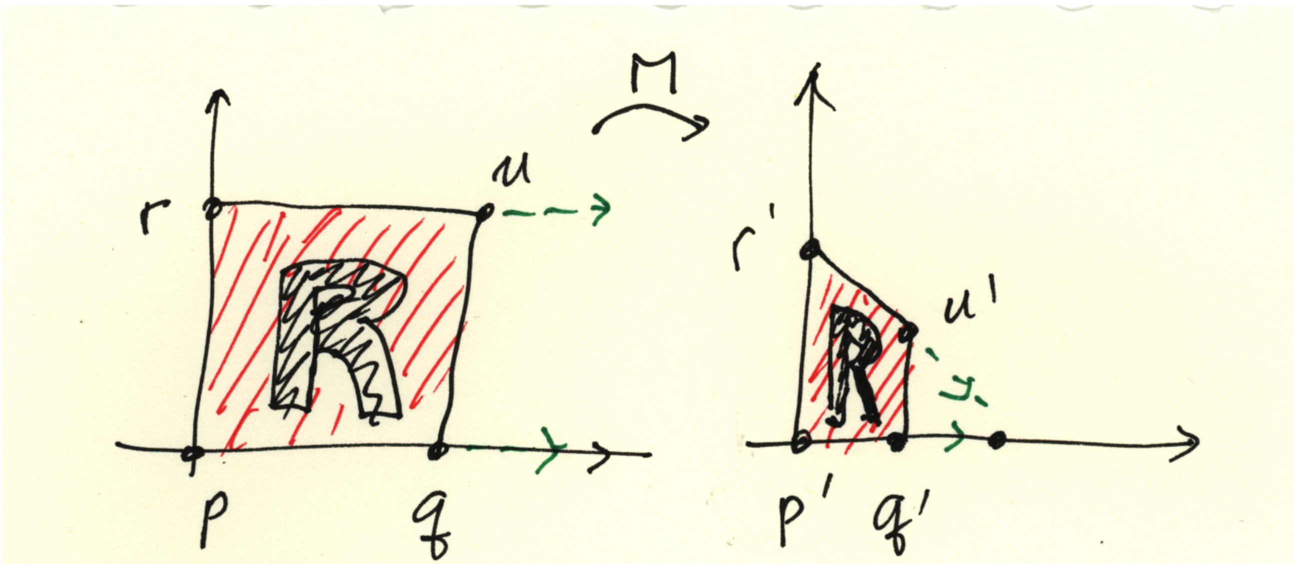
$$= \left[\; w + x,\; x,\; y \;\right]$$

Em coordenadas cartesianas:

$$(X, Y)M = [1, X, Y]M = [1{+}X, X, Y] = \left(\frac{X}{1 + X}, \frac{Y}{1 + X}\right)$$

$$
\begin{array}{rclcl}
pM & = & (0,0)M & = & [\ 1\ 0\ 0\ ] \\
qM & = & (1,0)M & = & [\ 1\ 1\ 0\ ] \\
rM & = & (0,1)M & = & [\ 1\ 0\ 1\ ] \\
uM & = & (1,1)M & = & [\ 1\ 1\ 1\ ]
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{lcl}
= [\ 1\ 0\ 0\ ] & = & (0,0) \\
= [\ 2\ 1\ 0\ ] & = & (1/2,0) \\
= [\ 1\ 0\ 1\ ] & = & (0,1) \\
= [\ 2\ 1\ 1\ ] & = & (1/2,1/2)
\end{array}
$$

Transformações projetivas não afins



Dados 4 pontos p, q, r, u onde u está dentro do triângulo $\mathsf{S}(p, q, r)$, existe uma única transformação projetiva que leva os cantos do primeiro quadrante para p, q, r, e o ponto $[1, 1, 1, 1]$ para u.

Queremos:

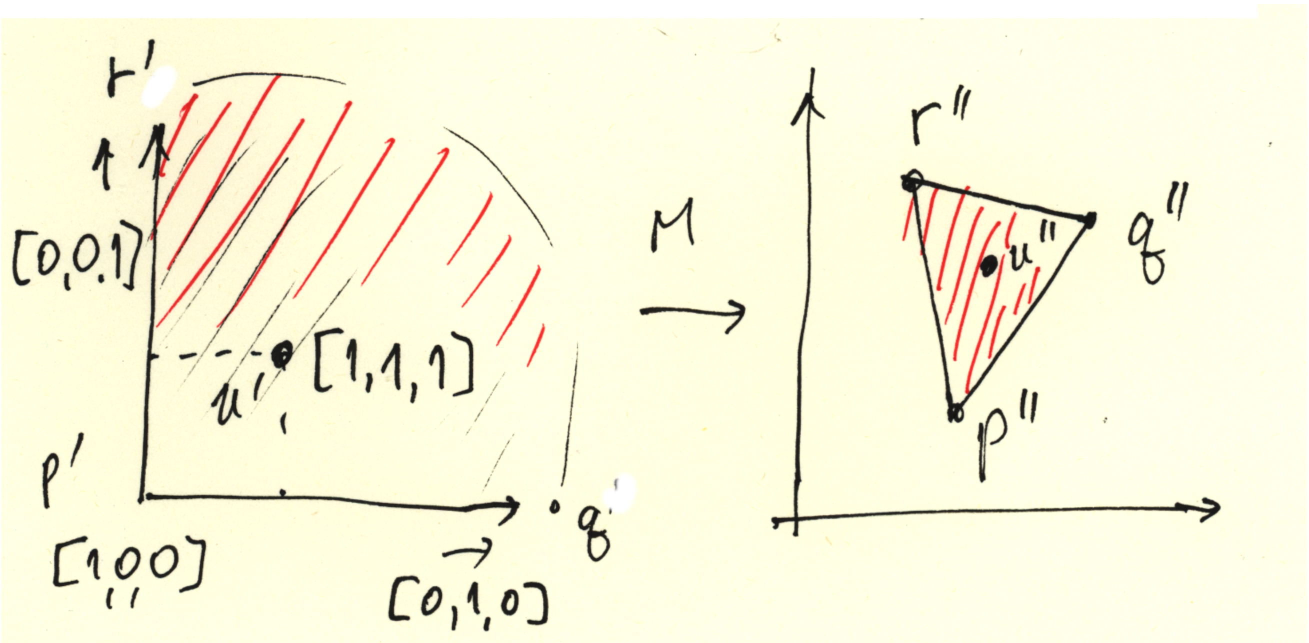
$$\begin{array}{c} [\ 1\ 0\ 0\ ] \\ [\ 0\ 1\ 0\ ] \\ [\ 0\ 0\ 1\ ] \\ [\ 1\ 1\ 1\ ] \end{array} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{array}{l} = [\ \alpha\, p.w \quad \alpha\, p.x \quad \alpha\, p.y\ ] \\ = [\ \beta\, q.w \quad \beta\, q.x \quad \beta\, q.y\ ] \\ = [\ \gamma\, r.w \quad \gamma\, r.x \quad \gamma\, r.y\ ] \\ = [\quad u.w \qquad u.x \qquad u.y\ ] \end{array}$$

Logo M é

$$M = \begin{bmatrix} \alpha p.w & \alpha p.x & \alpha p.y \\ \beta q.w & \beta q.x & \beta q.y \\ \gamma r.w & \gamma r.x & \gamma r.y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p.w & p.x & p.y \\ q.w & q.x & q.y \\ r.w & r.x & r.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N$$

Resta determinar α, β, e γ para que a quarta equação seja satisfeita.


r'
[0,0,1]
u'
[1,1,1]
p'
[1,0,0]
q'
[0,1,0]
M
r''
q''
u''
p''

A quarta equação é

$$[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N = [u.w, u.x, u.y]$$

ou seja

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [u.w, u.x, u.y] N^{-1}$$

O *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$ consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$, $y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Planos: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$ são o mesmo plano se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$ e $\mathcal{Z}'' = \alpha \mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

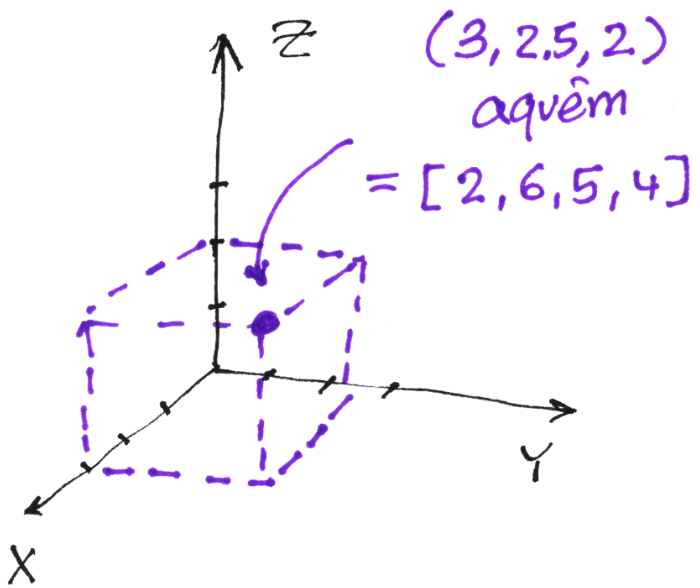
$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

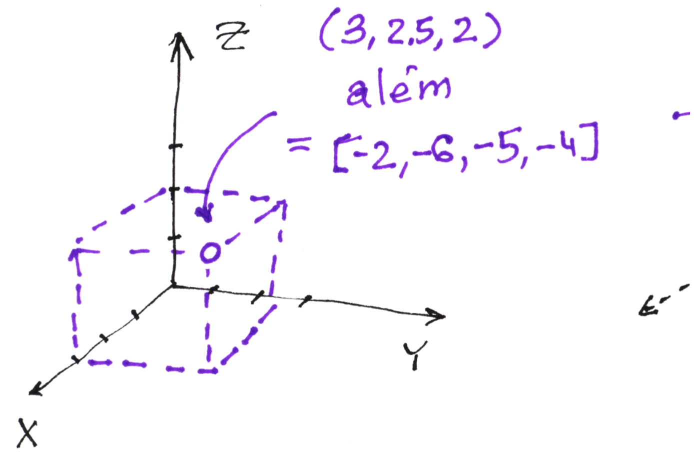
Toda a geometria projetiva orientada trdimensional segue destas definições.

As coordenadas homogêneas de um ponto no espaço são quaisquer quatro números reais $[w, x, y, z]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$, $Y = y/w$ e $Z = z/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y, Z), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY, wZ]$ para qualquer $w > 0$. Em particular, $[1, X, Y, Z]$.

Convenção:
Cartesianas: parênteses $(,,)$ e maiúsculas $X, Y, Z, \ldots$
Homogêneas: colchetes $[,,,]$ e minúsculas $w, x, y, z, \ldots$





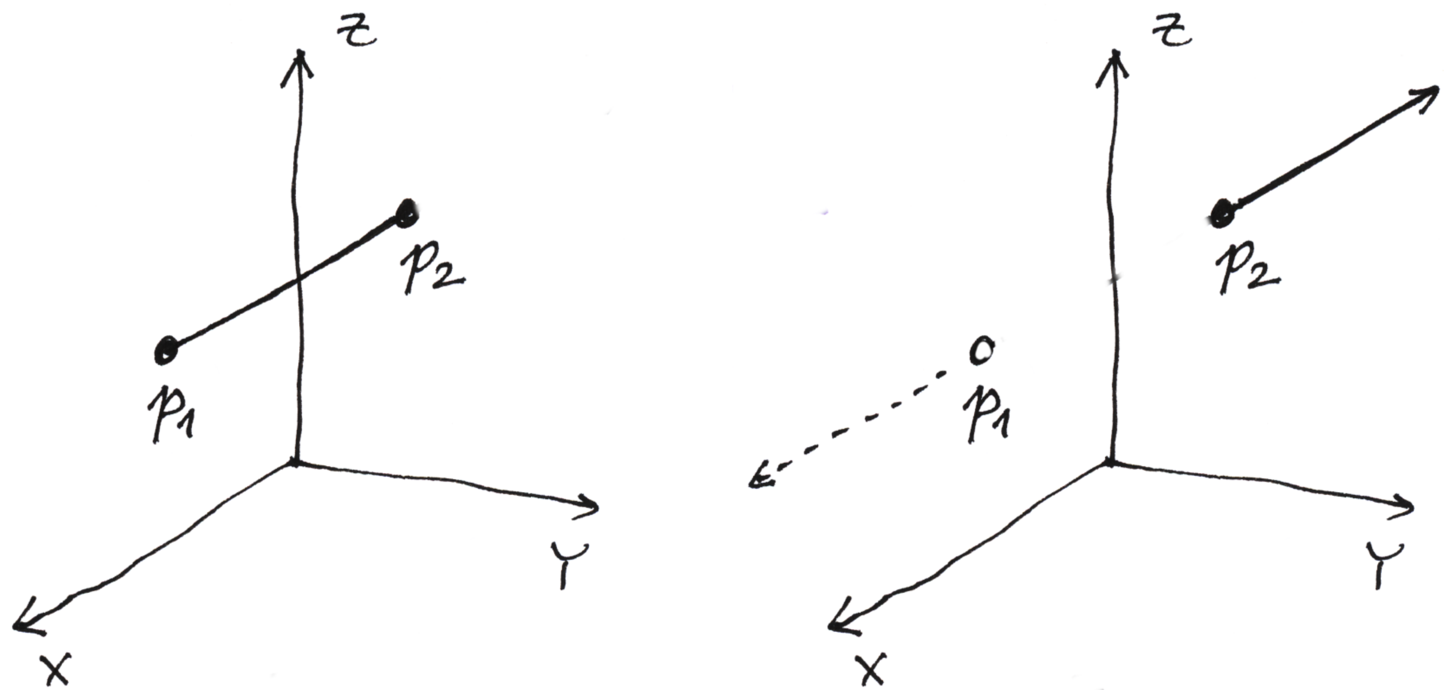
$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5, 2.0)\\
&= [1.0, 3.0, 2.5, 2.0]\\
&= [2, 6, 5, 4]\\
&= [100, 300, 250, 200]\\
&= [0.010, 0.030, 0.025, 0.020]\\
&= [12, 36, 30, 24]\\
&=
\end{aligned}
$$

Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1, z_1] \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2, z_2] \end{aligned}$$

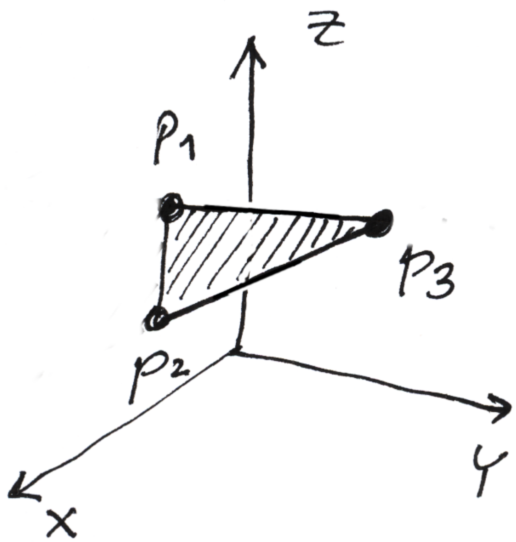
O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

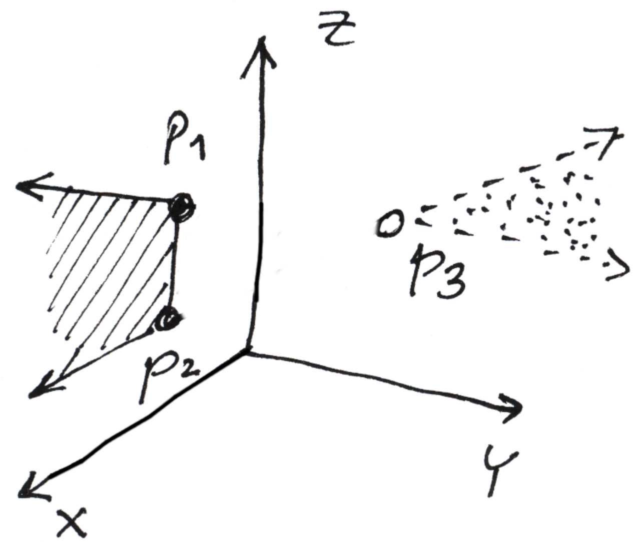
$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\, [\, \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2,\ \alpha z_1 + \beta z_2 \,] \ \mid\ \alpha,$


z
p2
p1
x
Y
z
p2
o
p1
x
Y

Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$, o *triângulo* com esses vértices é o conjunto de pontos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3) \;=\; \{\ [\ & \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\
& \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\
& \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \\
& \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\
]\ & \\
:\ & \\
& \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\
& \alpha + \beta + \gamma > 0 \\
\}\ &
\end{aligned}
$$


z
p1
p3
p2
y
x


z
p1
p3
p2
y
x