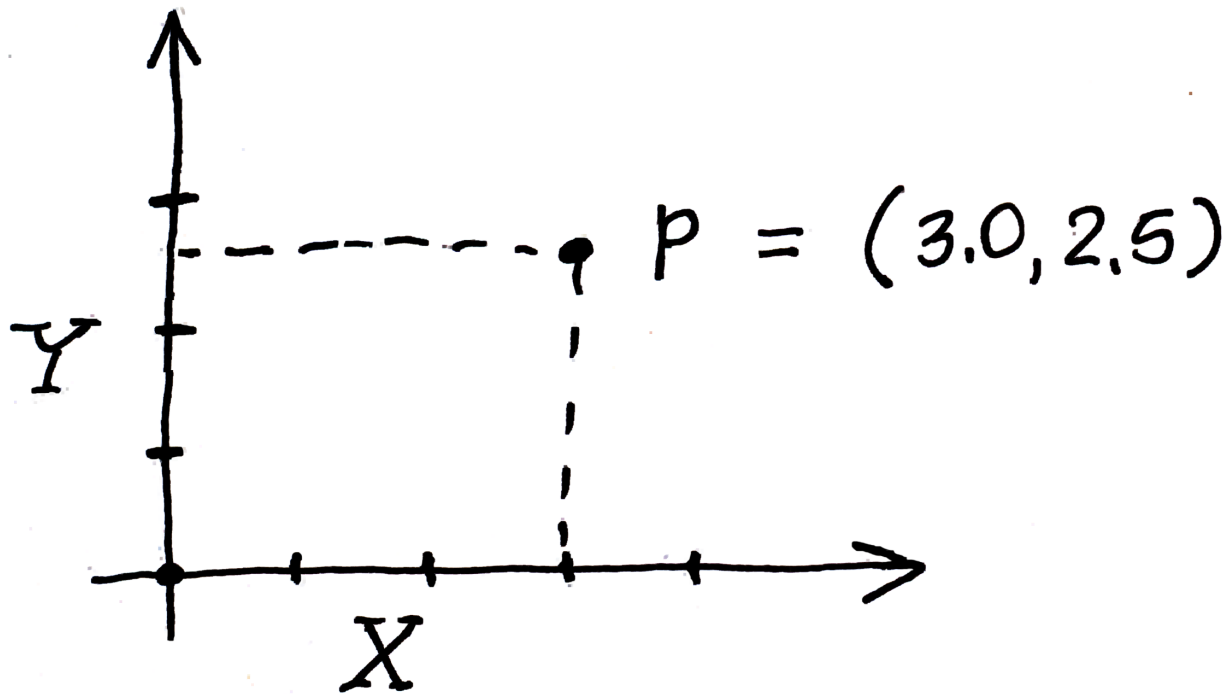
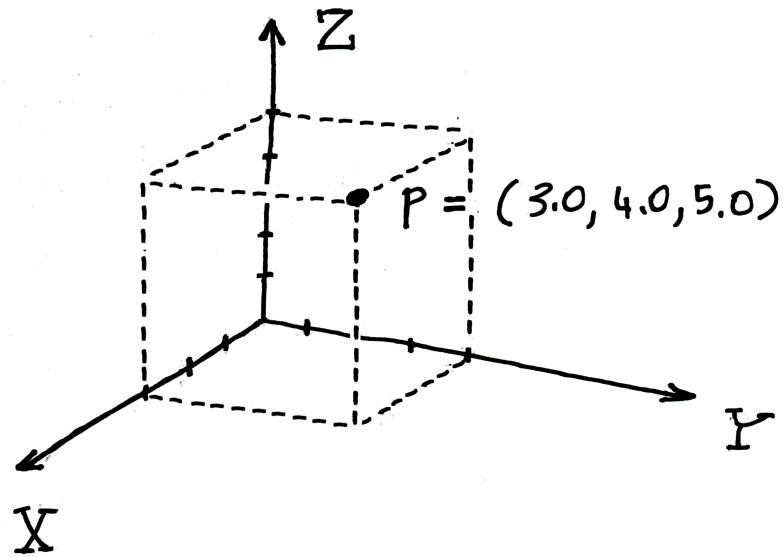


A maneira mais óbvia de fazer geometria no computador é usar geometria analítica, onde pontos são representados por suas coordenadas cartesianas.

Um ponto no plano pode ser representado por um par (X, Y) de números “reais” (ponto flutuante):



Um ponto no espaço pode ser representado por uma tripla (X, Y, Z) de coordenadas:



Um segmento de reta pode ser representado pelas coordenadas de seus dois extremos.

Determinando o ponto médio p_m de um segmento com extremos p_1, p_2 :

$$p_1 = (X_1, Y_1)$$

$$p_2 = (X_2, Y_2)$$

$$p_m = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2} \right)$$

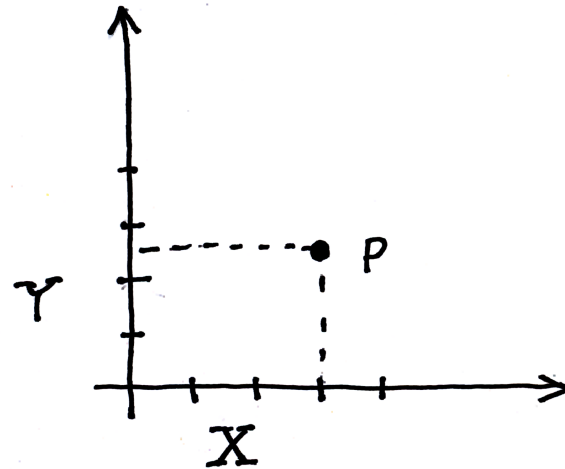
Programas (e hardware) para computação gráfica geralmente usam outra representação, *coordenadas homogêneas*.

As coordenadas homogêneas de um ponto no plano são quaisquer três números reais $[w, x, y]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$ e $Y = y/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y) , as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY]$ para qualquer $w > 0$.

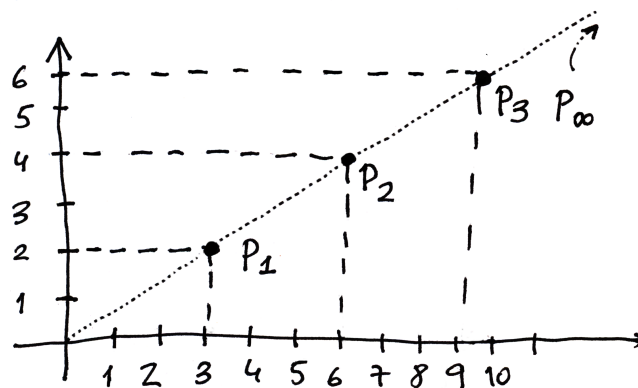
Convenção:

- Cartesianas: $(,)$ e maiúsculas X, Y, \dots
- Homogêneas: $[, ,]$ e minúsculas w, x, y, \dots



$$\begin{aligned}
 p &= (3.0, 2.5) \\
 &= [1.0, 3.0, 2.5] \\
 &= [2, 6, 5] \\
 &= [100, 300, 250] \\
 &= [0.010, 0.030, 0.025] \\
 &= [12, 36, 30] \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Interpretação de $[0, 3, 2]$: limite de $[w, 3, 2]$ quando w tende a zero.



$$p_1 = [1, 3, 2] = (3, 2)$$

$$p_2 = [1/2, 3, 2] = (6, 4) = 2(3, 2)$$

$$p_3 = [1/3, 3, 2] = (9, 6) = 3(3, 2)$$

...

$$p_\infty = [0, 3, 2] = \infty(3, 2)$$

$$p' = [w', x', y']$$

$$p'' = [w'', x'', y'']$$

p' e p'' são o mesmo ponto

se e somente se

existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$w' = \alpha w'' \quad x' = \alpha x'' \quad y' = \alpha y''$$

$$[2, 3, 5] \equiv [20, 30, 50]$$

$$[6, 3, 9] \not\equiv [6, 30, 90]$$

$$[0, 3, -5] \not\equiv [0, -3, 5]$$

Segmentos

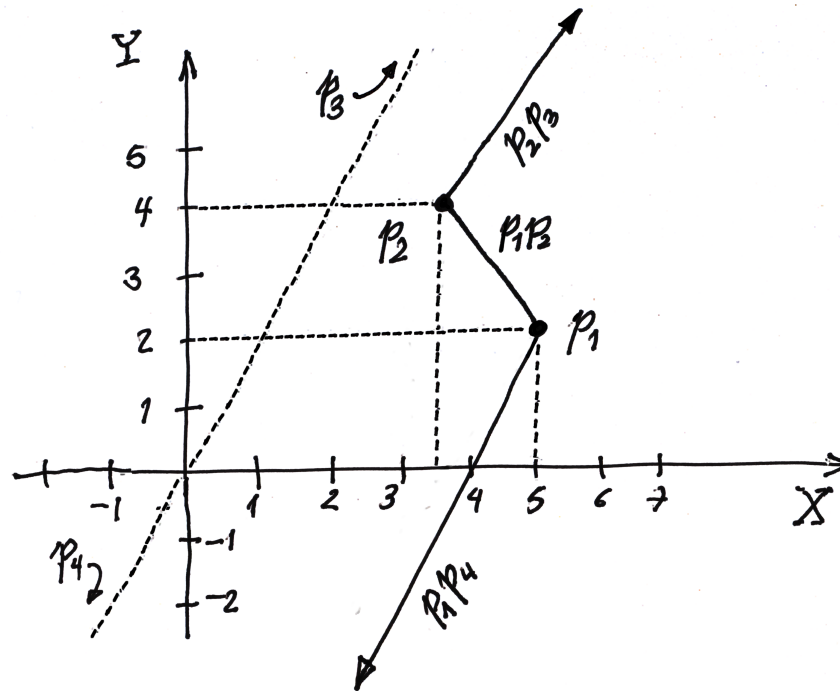
8

$$p_1 = [+1, +5, +2] = (5, 2)$$

$$p_2 = [+2, +7, +8] = (7/2, 8/2) = (3.5, 4.0)$$

$$p_3 = [0, +1, +2] = \infty(1, 2)$$

$$p_4 = [0, -1, -2] = \infty(-1, -2)$$



Reta em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y) está na reta se e somente se

$$AX + BY + C = 0$$

onde A, B, C são números reais, os *coeficientes* da reta.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y]$ com $w > 0$ está nessa reta se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

$$Ax + By + Cw = 0$$

fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

onde $\mathcal{W} = C$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$. Estes números, *nesta ordem*, são os *coeficientes homogêneos* da reta.

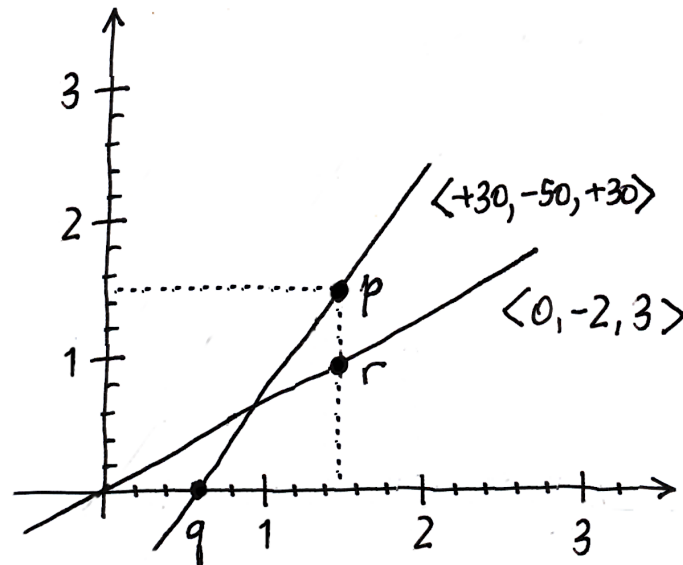
Indicamos essa reta por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$.

Por exemplo, os pontos $p = [2, 3, 3]$ e $q = [5, 3, 0]$ estão na reta $\langle +30, -50, +30 \rangle$, pois

$$(+30) \cdot 2 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 3 = 0$$

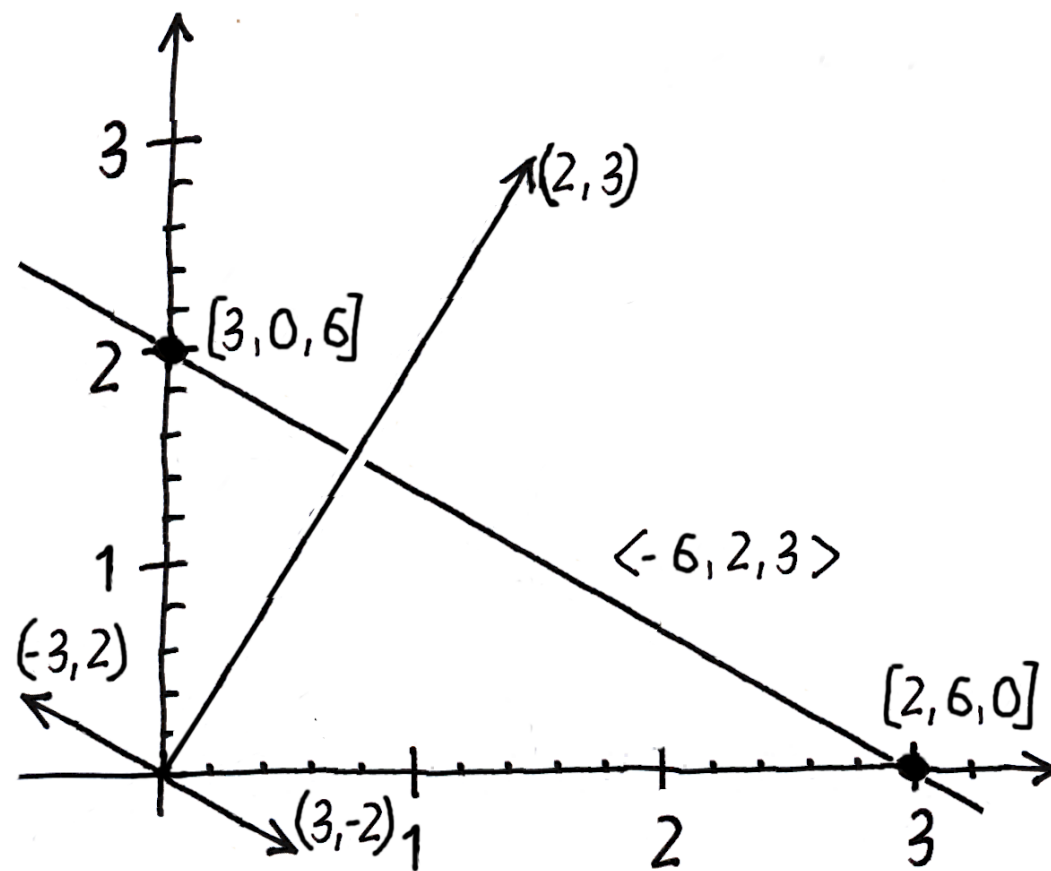
$$(+30) \cdot 5 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 0 = 0$$

Por outro lado, o ponto $r = [2, 3, 2]$ não está nessa reta, mas está na reta $\langle 0, -2, 3 \rangle$.



Em geral, os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ tem as seguintes interpretações:

- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um vetor **perpendicular** à reta.
- $(-\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, -\mathcal{X})$ são vetores **paralelos** à reta.
- \mathcal{W} é zero se e somente se a reta passa pela origem.
- \mathcal{X} é zero se e somente se a reta é horizontal (não depende de X).
- \mathcal{Y} é zero se e somente se a reta é vertical (não depende de Y).
- A distância da reta à origem é $|\mathcal{W}| / \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}$.
- Os pontos $[\mathcal{X}, -\mathcal{W}, 0]$ e $[\mathcal{Y}, 0, -\mathcal{W}]$, se válidos, estão sobre a reta.



Por definição, o ponto $[w, x, y]$ está na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ se e somente se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

mesmo quando o ponto está no infinito ($w = 0$).

Uma reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ normalmente tem dois pontos no infinito:
 $[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$ e $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ (nas duas direções paralelas à reta).

Formalmente, uma reta em coordenadas homogêneas é uma tripla $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, onde $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ não são todos zero.

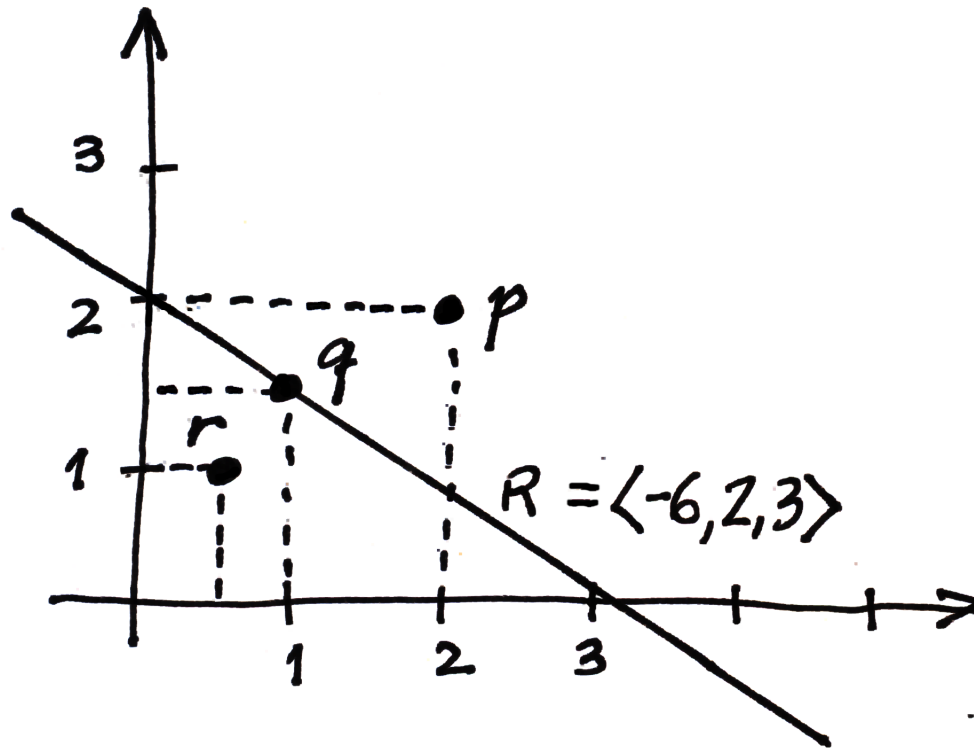
Duas triplas $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$\mathcal{W}' = \alpha \mathcal{W}'' \quad \mathcal{X}' = \alpha \mathcal{X}'' \quad \mathcal{Y}' = \alpha \mathcal{Y}''$$

A *posição* do ponto $p = [w, x, y]$ em relação à reta $R = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ é

$$p \diamond R = \text{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y) = \begin{cases} -1 & \text{lado negativo} \\ 0 & \text{sobre} \\ +1 & \text{lado positivo} \end{cases}$$

onde $\text{sgn}(x)$ é o sinal de x (-1 , 0 , ou $+1$).



$$p \diamond R = [1, 2, 2] \diamond \langle -6, 2, 3 \rangle = \text{sgn}(-6 + 4 + 6) = \text{sgn}(+4) = +1$$

$$q \diamond R = [3, 3, 4] \diamond \langle -6, 2, 3 \rangle = \text{sgn}(-18 + 6 + 12) = \text{sgn}(0) = 0$$

$$r \diamond R = [2, 1, 2] \diamond \langle -6, 2, 3 \rangle = \text{sgn}(-12 + 2 + 6) = \text{sgn}(-4) = -1$$

O *plano projetivo orientado* \mathbb{T}^2 consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$
 sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$
 são o mesmo ponto se e somente se
 existe $\alpha > 0$ tal que
 $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.

Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$
 sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$
 são a mesma reta se e somente se
 existe $\alpha > 0$ tal que
 $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \text{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Pela definição do \mathbb{T}^2 , as retas $R = \langle -6, +2, +3 \rangle$ e $S = \langle +6, -2, -3 \rangle$ são distintas.

Elas passam pelos mesmos pontos:

$$[w, x, y] \diamond R = 0 \Leftrightarrow -6w + 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow +6w - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = 0$$

Mas os lados positivos e negativos são invertidos:

$$[w, x, y] \diamond R = +1 \Leftrightarrow -6w + 2x + 3y > 0 \Leftrightarrow +6w - 2x - 2y < 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = -1$$

$$[w, x, y] \diamond R = -1 \Leftrightarrow -6w + 2x + 3y < 0 \Leftrightarrow +6w - 2x - 2y > 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = +1$$

Em geral, a reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ é distinta da *reta oposta* $\neg \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle$, embora passe pelos mesmos pontos. A diferença é qual lado é positivo, e qual é negativo.

Pela definição, $[-2, -3, -5]$ é um ponto válido de \mathbb{T}^2 , distinto de $[2, 3, 5]$.

Por convenção, ambos tem as mesmas coordenadas cartesianas:

$$(-3/-2, -5/-2) = (3/2, 5/2).$$

Para manter a distinção, imaginamos que o plano \mathbb{R}^2 é uma folha infinita de papel, e que $[2, 3, 5]$ está “na frente” dessa folha (no *aquém* do \mathbb{R}^2), enquanto que $[-2, -3, -5]$ está na mesma posição mas “no verso” da folha (no *além* do \mathbb{R}^2).

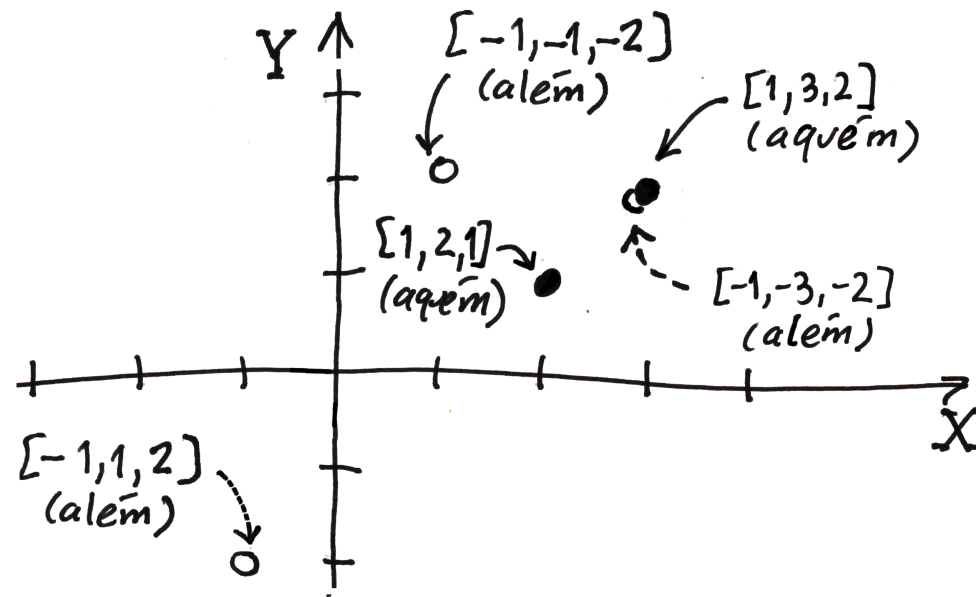
De modo geral, a *interpretação cartesiana* de um ponto $[w, x, y]$ de \mathbb{T}^2 é

O ponto $(x/w, y/w)$ do *aquém* do \mathbb{R}^2 , se $w > 0$;

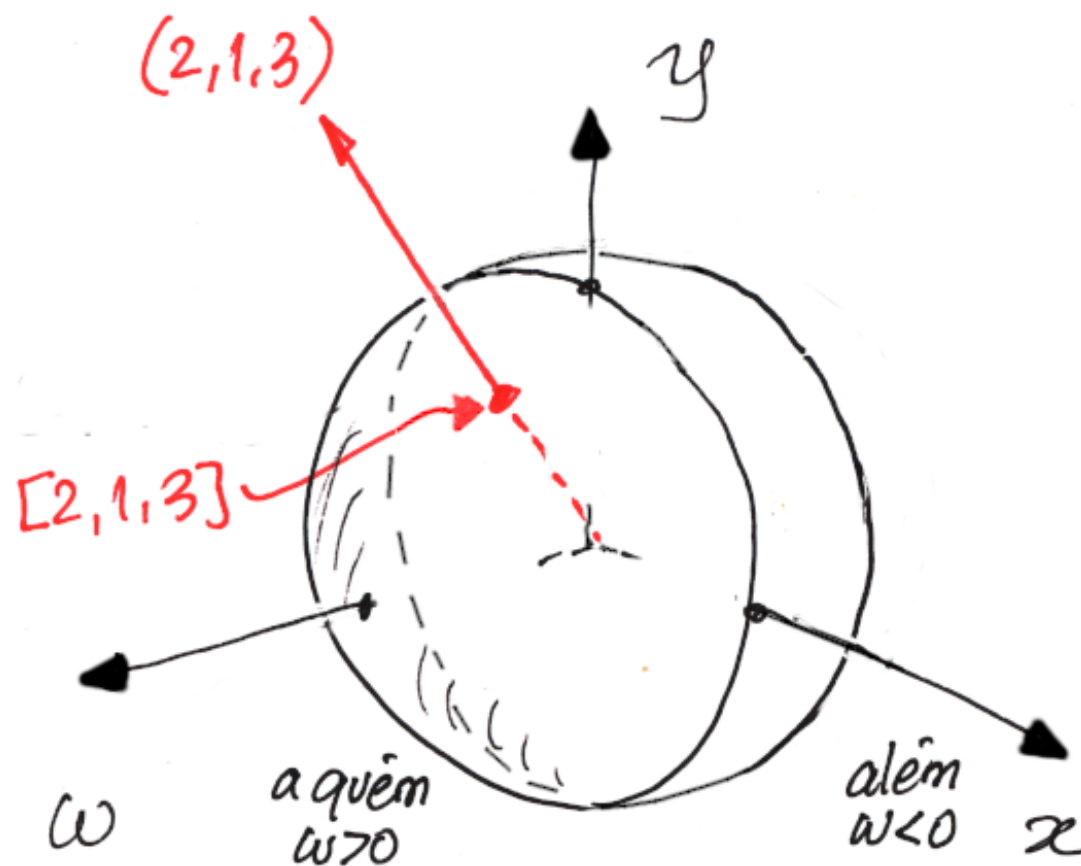
O ponto no infinito na direção (x, y) do *aquém*, se $w = 0$;

O ponto $(x/w, y/w)$ do *além* do \mathbb{R}^2 , se $w < 0$.

O ponto $[-w, -x, -y]$ é o *antípoda* de $[w, x, y]$, denotado por $\neg[w, x, y]$



$$[w, x, y] \leftrightarrow \frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$



$\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle \leftrightarrow$ círculo perpendicular a $(\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$

