Notas de Aula - MC937A/MO603A - 2021-08-23

Jorge Stolfi

Instituto de Computação

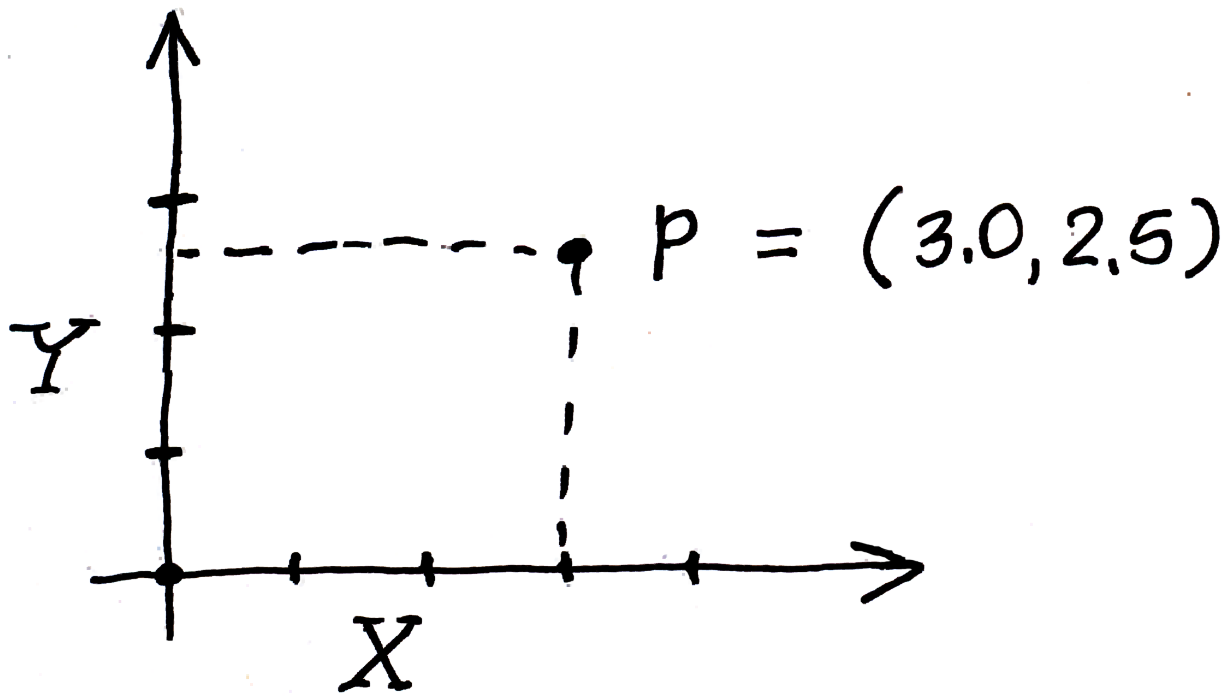
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

stolfi@ic.unicamp.br

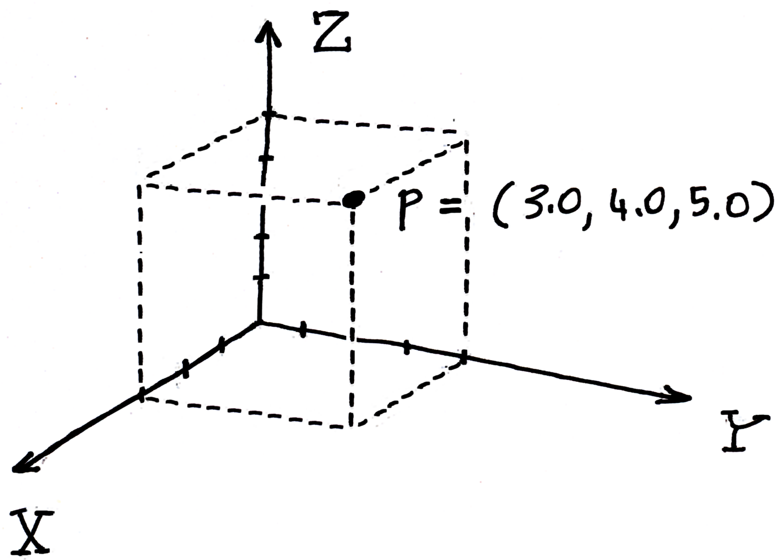
Last Modified 2021-08-23 20:48:35 by stolfi

A maneira mais óbvia de fazer geometria no computador é usar geometria analítica, onde pontos são representados por suas coordenadas cartesianas.

Um ponto no plano pode ser representado por um par (X, Y) de números "reais" (ponto flutuante):



Um ponto no epaço pode ser representado por uma tripla (X, Y, Z) de coordenadas:



Um segmento de reta pode ser representado pelas coordenadas de seus dois extremos.

Determinando o ponto médio p_{m} de um segmento com extremos p_1, p_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= (X_1, Y_1) \\ p_2 &= (X_2, Y_2) \\ p_{\mathrm{m}} &= \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Programas (e hardware) para computação gráfica geralmente usam outra representação, *coordenadas homogêneas*.

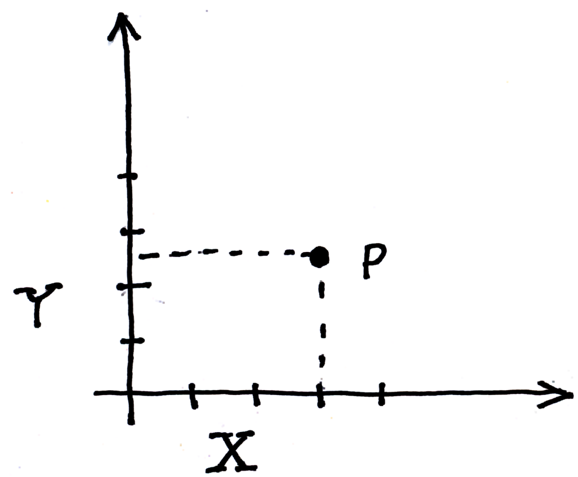
As coordenadas homogêneas de um ponto no plano são quaisquer três números reais $[w, x, y]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$ e $Y = y/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY]$ para qualquer $w > 0$.

Convenção:

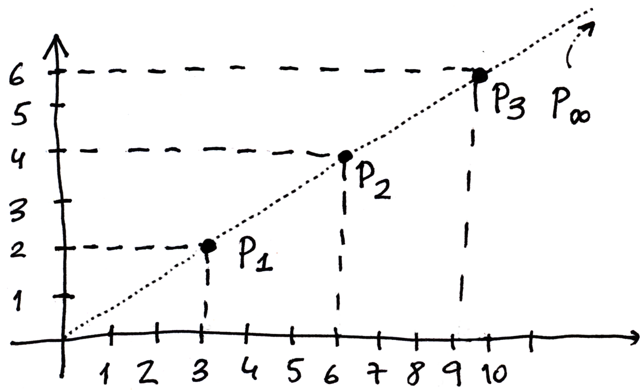
- Cartesianas: $(,)$ e maiúsculas $X, Y, \ldots$
- Homogêneas: $[,,]$ e minúsculas $w, x, y, \ldots$

Coordenadas homogêneas no plano



$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5] \\
&= [2, 6, 5] \\
&= [100, 300, 250] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025] \\
&= [12, 36, 30] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Interpretação de $[0, 3, 2]$: limite de $[w, 3, 2]$ quando w tende a zero.



$$
\begin{aligned}
p_1 = [1, 3, 2] &= (3, 2) \\
p_2 = [1/2, 3, 2] &= (6, 4) = 2(3, 2) \\
p_3 = [1/3, 3, 2] &= (9, 6) = 3(3, 2) \\
&\ldots \\
p_\infty = [0, 3, 2] &= \infty(3, 2)
\end{aligned}
$$

Equivalência de coordenadas homogêneas

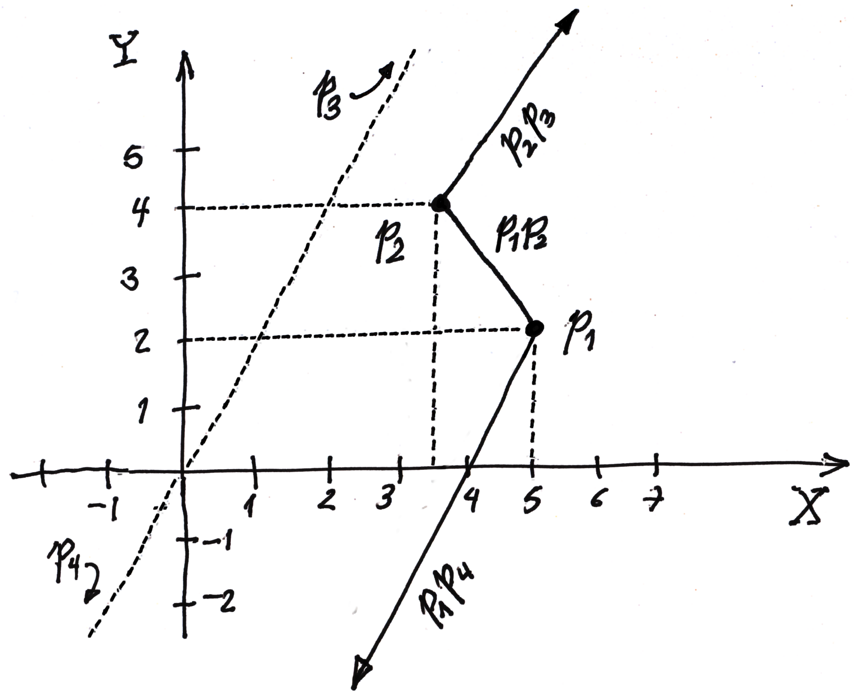
$$\begin{aligned} p' &= [w', x', y'] \\ p'' &= [w'', x'', y''] \end{aligned}$$

p' e p'' são o mesmo ponto
se e somente se
existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$w' = \alpha w'' \qquad x' = \alpha x'' \qquad y' = \alpha y''$$

$$\begin{aligned} [2, 3, 5] &\equiv [20, 30, 50] \\ [6, 3, 9] &\not\equiv [6, 30, 90] \\ [0, 3, -5] &\not\equiv [0, -3, 5] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_1 = [+1, +5, +2] &= (5, 2) \\
p_2 = [+2, +7, +8] &= (7/2, 8/2) = (3.5, 4.0) \\
p_3 = [\ \ 0, +1, +2] &= \infty(1, 2) \\
p_4 = [\ \ 0, -1, -2] &= \infty(-1, -2)
\end{aligned}
$$



Reta em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y) está na reta se e somente se

$$AX + BY + C = 0$$

onde A, B, C são números reais, os *coeficientes* da reta.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y]$ com $w > 0$ está nessa reta se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

$$Ax + By + Cw = 0$$

fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

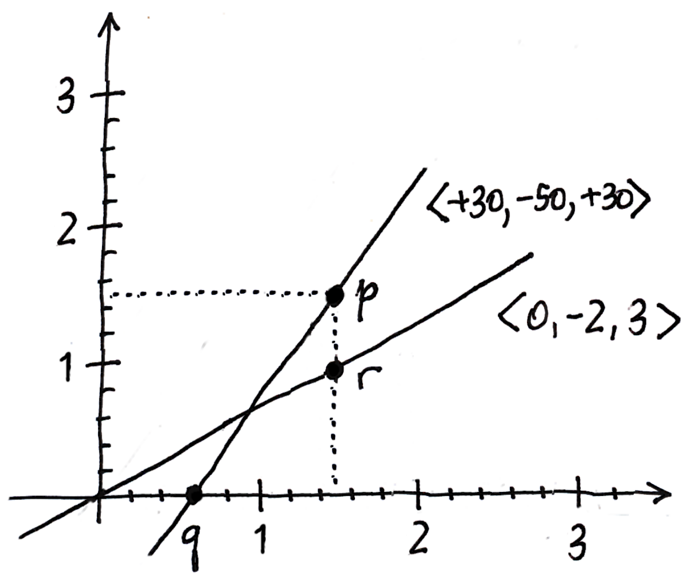
onde $\mathcal{W} = C$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$. Estes números, *nesta orderm*, são os *coeficientes homogêneos* da reta.

Indicamos essa reta por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$.

Por exemplo, os pontos $p = [2, 3, 3]$ e $q = [5, 3, 0]$ estão na reta $\langle +30, -50, +30 \rangle$, pois

$$\begin{aligned} (+30) \cdot 2 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 3 &= 0 \\ (+30) \cdot 5 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

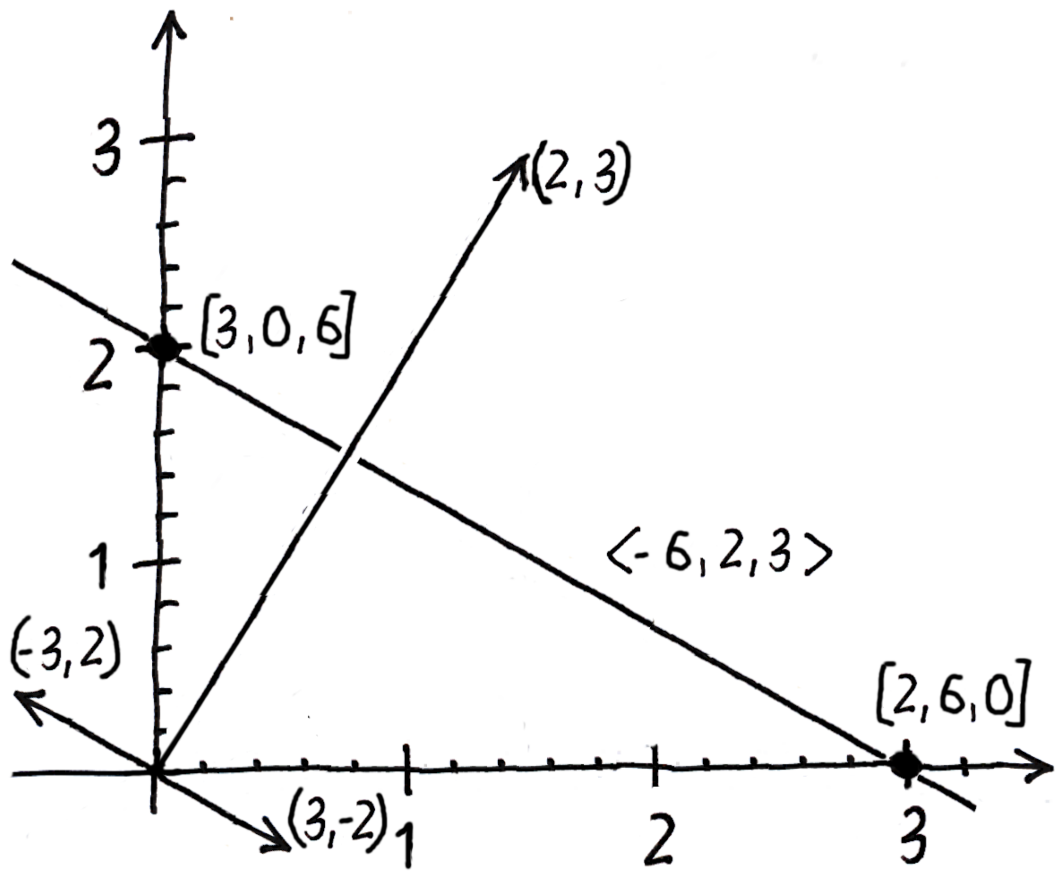
Por outro lado, o ponto $r = [2, 3, 2]$ não está nessa reta, mas está na reta $\langle 0, -2, 3 \rangle$.



Interpretação dos coeficientes

Em geral, os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ tem as seguintes interpretações:

- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um vetor **perpendicular** à reta.
- $(-\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, -\mathcal{X})$ são vetores **paralelos** à reta.
- $\mathcal{W}$ é zero se e somente se a reta passa pela origem.
- $\mathcal{X}$ é zero se e somente se a reta é horizontal (não depende de X).
- $\mathcal{Y}$ é zero se e somente se a reta é vertical (não depende de Y).
- A distância da reta à origem é $|\mathcal{W}| / \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}$.
- Os pontos $[\mathcal{X}, -\mathcal{W}, 0]$ e $[\mathcal{Y}, 0, -\mathcal{W}]$, se válidos, estão sobre a reta.


3
(2, 3)
[3, 0, 6]
2
<- 6, 2, 3>
1
(-3, 2)
[2, 6, 0]
(3, -2)
1
2
3

Por defininição, o ponto $[w, x, y]$ está na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ se e somente se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

mesmo quando o ponto está no infinito $(w = 0)$.

Uma reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ normalmente tem dois pontos no infinito:
$[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$ e $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ (nas duas direções paralelas à reta).

Formalmente, uma reta em coordenadas homogêneas é uma tripla $\langle\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$, onde $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ não são todos zero.

Duas triplas $\langle\mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}'\rangle$ e $\langle\mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}''\rangle$ são a mesma reta se e somente se existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$\mathcal{W}' = \alpha\mathcal{W}'' \qquad \mathcal{X}' = \alpha\mathcal{X}'' \qquad \mathcal{Y}' = \alpha\mathcal{Y}''$$