O espaço projetivo orientado

O *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$ consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$, $y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Planos: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$ são o mesmo plano se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$ e $\mathcal{Z}'' = \alpha \mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \mathrm{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

Toda a geometria projetiva orientada trdimensional segue destas definições.

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^3$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z] \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ N & P & Q & R \end{bmatrix} \\
&= \left[\, Aw + Ex + Iy + Nz,\ \ldots,\ Dw + Hx + Ly + Rz \,\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\, w-z,\ 4w-3y-3z,\ 2w+2x,\ x \,\right]$$

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^3$
é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito:
Se $M([w,x,y,z]) = [w',x',y',z']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

não altera w

destino da origem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & A & B & C \\ 0 & D & E & F \\ 0 & G & H & I \end{bmatrix}$$

imagem do VETOR (1,0,0)

imagem do VETOR (0,1,0)

imagem do VETOR (0,0,1)

Em coordenadas cartesianas:

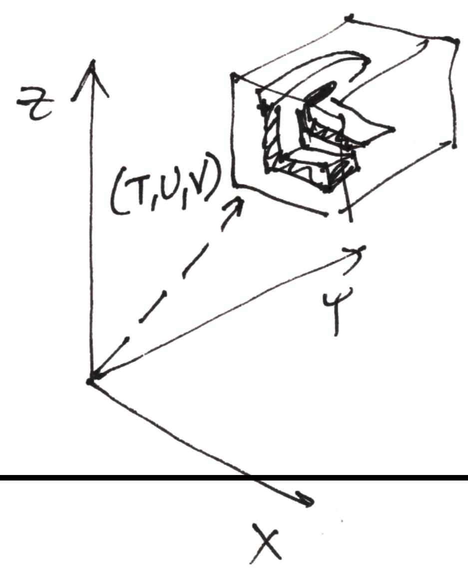
$$M((X,Y,Z)) = (X,Y,Z)\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} + (T,U,V)$$

Transformações afins: Translação

Translação pelo vetor cartesiano (T, U, V):

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\, w,\ Tw+x,\ Uw+y\ \ Vw+y \,\right]
\end{aligned}
$$

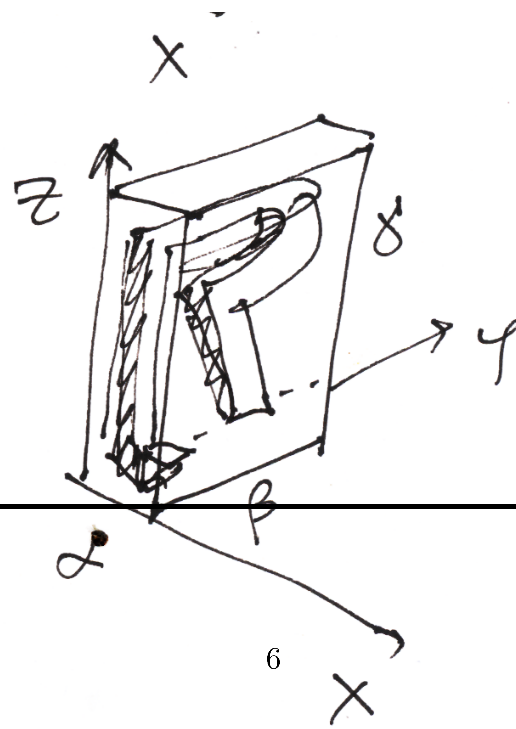
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, T+X, U+Y, V+Z] = (X,Y,Z)+(T,U,V)$$



Mudança de escala por fatores α em X, β em Y, γ em Z:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\
&= \left[\, w,\ \alpha x,\ \beta y,\ \gamma z \,\right]
\end{aligned}
$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,\alpha X,\beta Y,\gamma Z] = (\alpha X,\beta Y,\gamma Z)$$



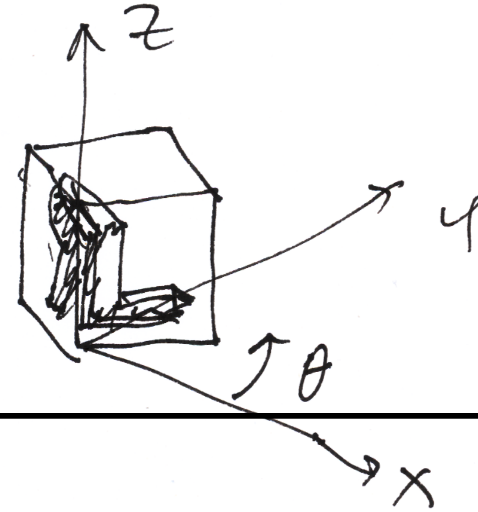
Transformações afins: Rotação

Rotação anti-horária por θ radianos em torno do eixo Z:

$$\begin{aligned} M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\, w,\ cx - sy,\ sx + cy,\ z \,\right] \end{aligned}$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, cX - sY, sX - cY, Z] = (cX - sY, sX - cY, Z)$$



Transformações afins: Rotação por 90 graus

Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos)
em torno do eixo Z:

$$\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1a \end{bmatrix} \\
&= \left[\, w,\ -y,\ x,\ z \,\right]
\end{aligned}$$

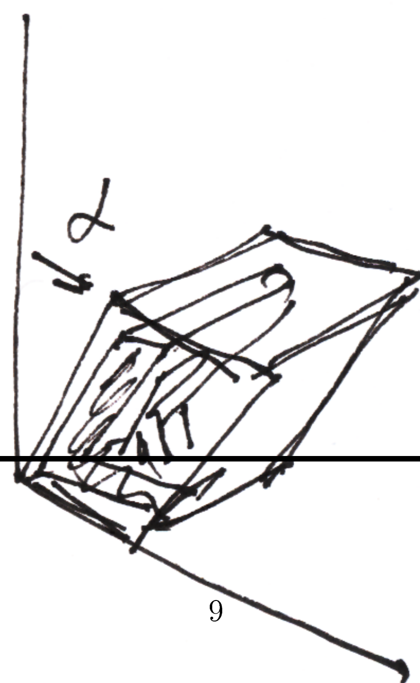
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-Y,+X,Z] = (-Y,+X,Z)$$

Transformações afins: Cisalhamento

Cisalhamento na direção X proposcional a Y com fator α:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\, w,\ x+\alpha y,\ y,\ z \,\right]
\end{aligned}
$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, X+\alpha Y, Y, Z] = (X+\alpha Y, Y, Z)$$



Espelhamento na direção X pelo plano YZ:

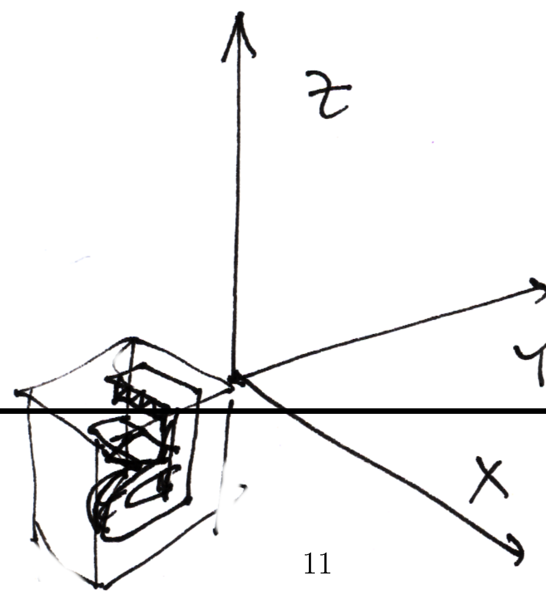
$$\begin{aligned} M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ -x,\ y,\ z\ \right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,Y,Z] = (-X,Y,Z)$$

Espelhamento pela origem:

$$\begin{aligned} M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\, w,\ -x,\ -y,\ -z \,\right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,-Y,-Z] = (-X,-Y,-Z)$$



Transformação afim que leva o tetraedro canônico
$K = \mathsf{S}((0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\,(0,0,1))$
para um tetraedro qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0, Y_0, Z_0),\ (X_1, Y_1, Z_1),\ (X_2, Y_2, Z_2)\,(X_3, Y_3, Z_3))$:

$$
\begin{array}{rcl}
M((0,0,0)) & = & \left[\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \right] \\
M((1,0,0)) & = & \left[\ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \right] \\
M((0,1,0)) & = & \left[\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \right] \\
M((0,0,1)) & = & \left[\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \right]
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & X_0 & Y_0 & Z_0 \\
0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \\
0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 & Z_2 - Z_0 \\
0 & X_3 - X_0 & Y_3 - Y_0 & Z_3 - Z_0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l}
= \left[\ 1\ \ X_0\ \ Y_0\ \ \ Z_0\ \right] \\
= \left[\ 1\ \ X_1\ \ Y_1\ \ \ Z_1\ \right] \\
= \left[\ 1\ \ X_2\ \ Y_2\ \ \ Z_2\ \right] \\
= \left[\ 1\ \ X_3\ \ Y_3\ \ Z_3 a\ \right]
\end{array}
$$

Transformação afim que leva um tetraedro genérico
$T' = \mathsf{S}((X'_0, Y'_0, Z'_0), (X'_1, Y'_1, Z'_1), (X'_2, Y'_2, Z'_2), (X'_3, Y'_3, Z'_3))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X''_0, Y''_0, Z''_0), (X''_1, Y''_1, Z''_1), (X''_2, Y''_2, Z''_2), (X''_3, Y''_3, Z''_3))$:

$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T''.

A trasfomação de perspectiva é usada para produzir imagens planas de cenas tridimensionais:

$$[w,x,y,z]M = [w,x,y,z]\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ -1 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \left[\; w - Dz,\; x,\; y,\; z \;\right]$$

Em coordenadas cartesianas:

$$M((X,Y,Z)) = [1,X,Y,Z]M = [D-Z,DX,DY,DZ] = \frac{1}{1-Z/D}(X,Y,$$

Transformação de pespectiva 3D