O espaço projetivo orientado 1

O *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$ consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$
sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$
são o mesmo ponto se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$, $y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Retas: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto
$\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$
são a mesma reta se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$ e $\mathcal{Z}'' = \alpha \mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

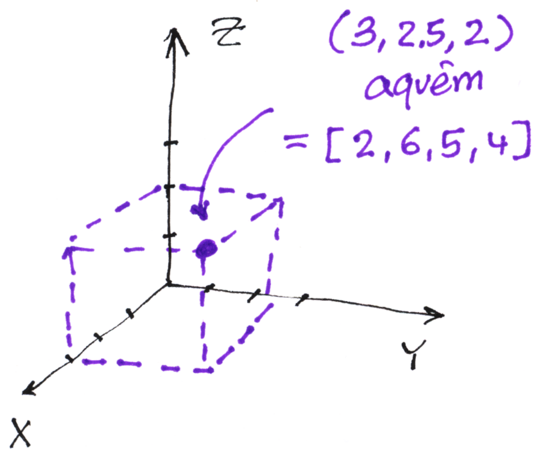
$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

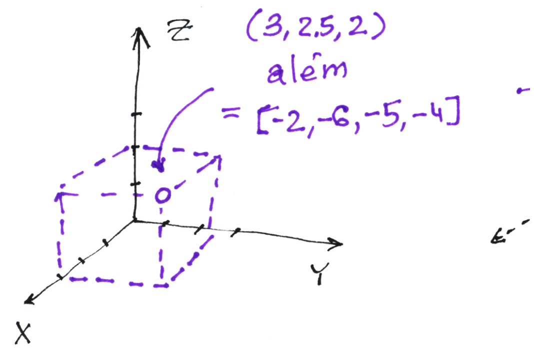
Toda a geometria projetiva orientada trdimensional segue destas definições.

As coordenadas homogêneas de um ponto no espaço são quaisquer quatro números reais $[w, x, y, z]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$, $Y = y/w$ e $Z = z/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y, Z), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY, wZ]$ para qualquer $w > 0$. Em particular, $[1, X, Y, Z]$.

Convenção:
Cartesianas: parênteses $(,,)$ e maiúsculas $X, Y, Z, \ldots$
Homogêneas: colchetes $[,,,]$ e minúsculas $w, x, y, z, \ldots$





$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5, 2.0) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5, 2.0] \\
&= [2, 6, 5, 4] \\
&= [100, 300, 250, 200] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025, 0.020] \\
&= [12, 36, 30, 24] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Segmentos no espaço

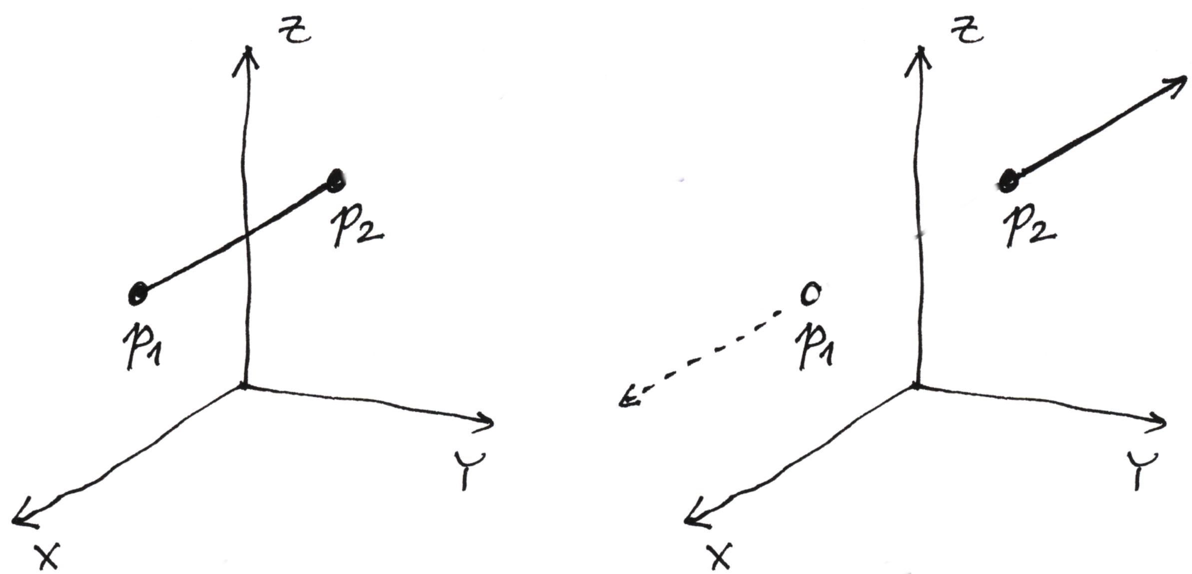
Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1, z_1] \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2, z_2] \end{aligned}$$

O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

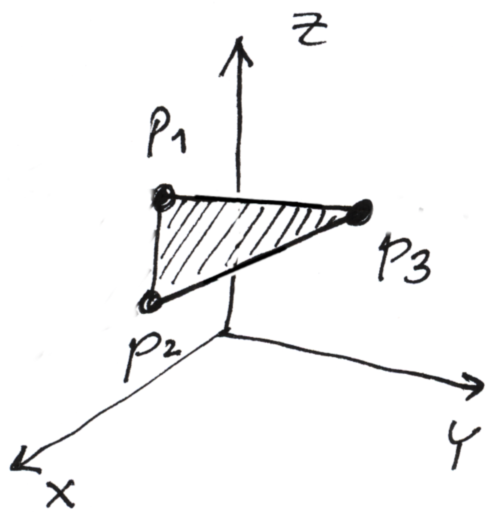
$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\, [\ \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2,\ \alpha z_1 + \beta z_2\ ]\ \mid\ \alpha, \beta \geq 0\ \wedge\ \alpha + \beta$$

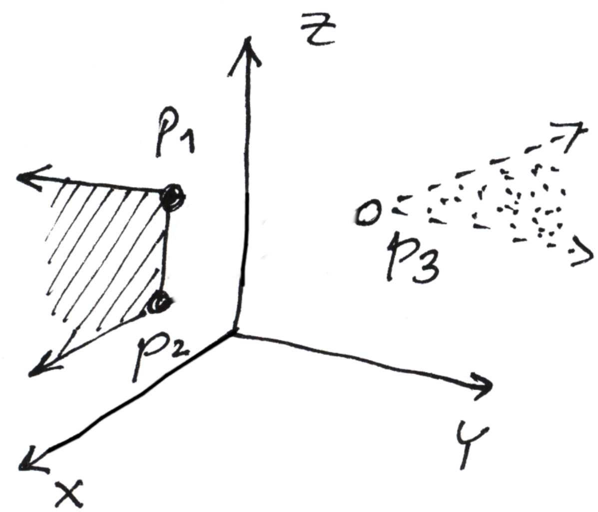
Segmentos no espaço



Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$, o *triângulo* com esses vértices é o conjunto de pontos

$$\begin{aligned}\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3) \;=\; \{ \; [\; & \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\ & \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\ & \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \\ & \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\ ] & \\ : & \\ & \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\ & \alpha + \beta + \gamma > 0 \\ \} &\end{aligned}$$


z
p_1
p_3
p_2
x
y


z
p_1
p_3
p_2
x
y

Plano em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y, Z) está no plano se e somente se

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

onde A, B, C, D são números reais, os *coeficientes cartesianos* do plano.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y, z]$ com $w > 0$ está nessa reta se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C\frac{z}{w} + D = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cz + Dw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

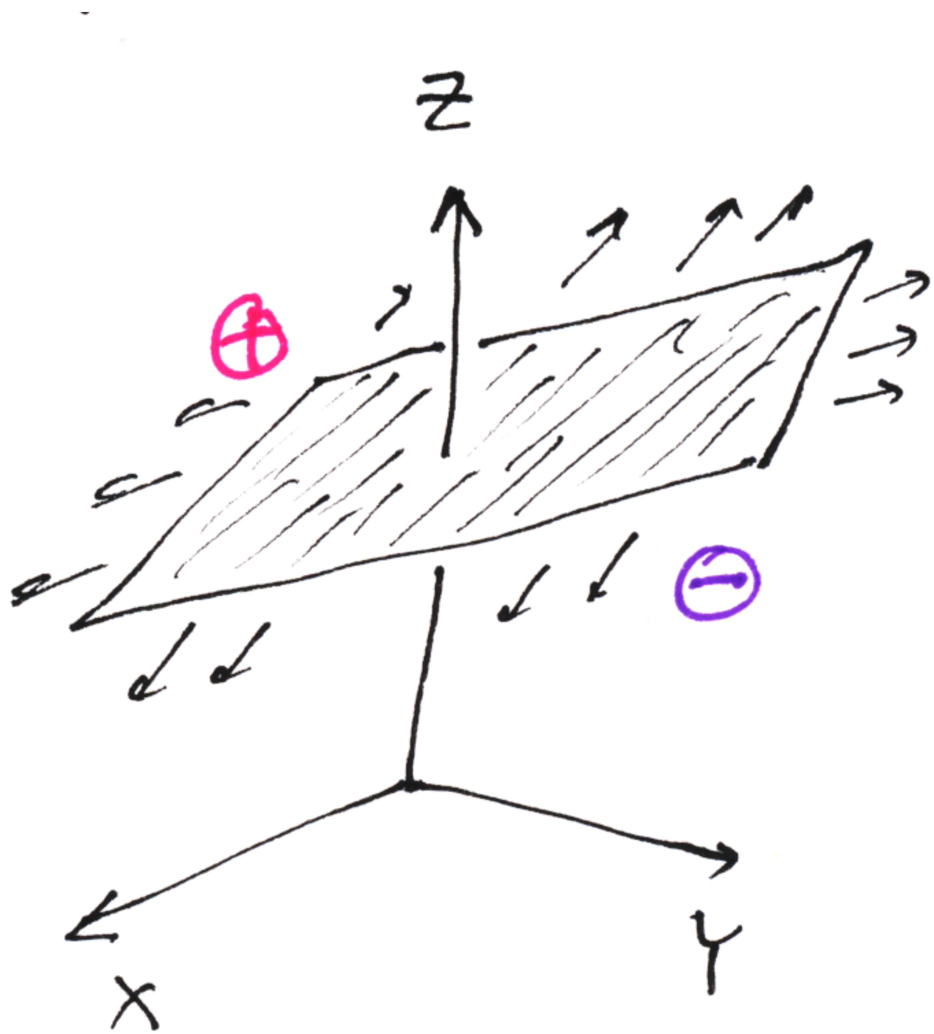
$$Ax + By + Cwz + Dw = 0$$

fica mais natural se escrita

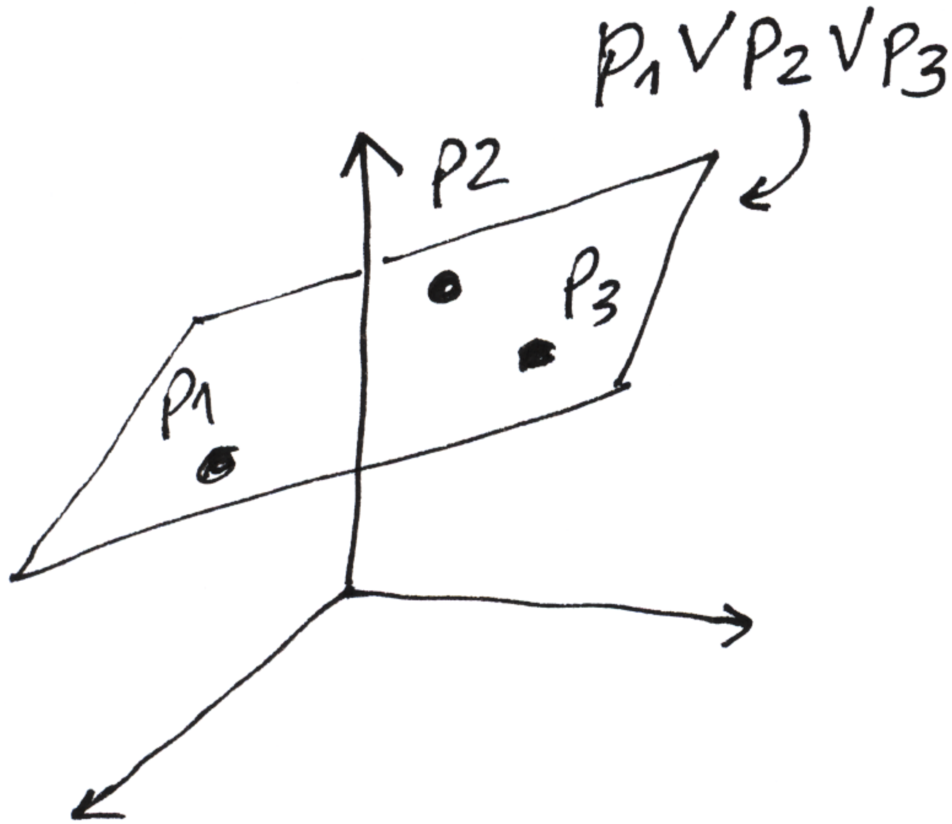
$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0$$

onde $\mathcal{W} = D$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$, $\mathcal{Z} = C$. Estes números, *nesta orderm*, são os *coeficientes homogêneos* do plano.

Indicamos esse plano por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$.


Z
+
−
X
Y

Plano por três pontos

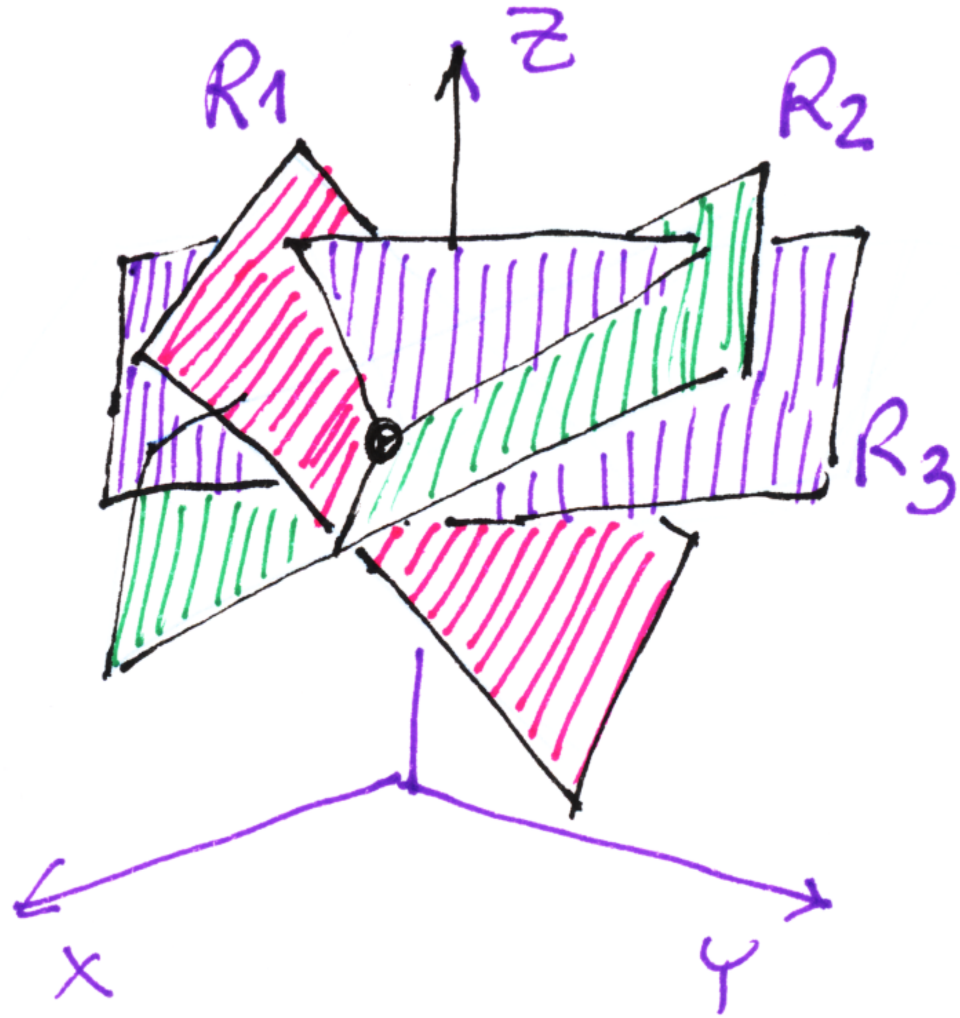


Dados três pontos

$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1, z_1], & (1)\\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2, z_2], & (2)\\ p_3 &= [w_3, x_3, y_3, z_3] & (3) \end{aligned}$$

o plano p_1 *junta* p_2 *junta* p_3 é

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 = \left\langle +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\rangle$$


R1
Z
R2
R3
X
Y

Dados tres planos

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle, & (4)\\
R_2 &= \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle, & (5)\\
R_3 &= \langle \mathcal{W}_3, \mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Z}_3 \rangle & (6)
\end{aligned}
$$

o ponto R_1 *encontra* R_2 *encontra* R_2

$$
R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 = \Bigg[+\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 \end{vmatrix}
$$