O plano projetivo orientado

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y] \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \\
&= \left[\; Aw + Dx + Gy,\; Bw + Ex + Hy,\; Cw + Fx + Iy \;\right]
\end{aligned}
$$

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^2$
é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito:
Se $M([w,x,y]) = [w',x',y']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

sempre

para onde vai a origem do aquém

transformação linear do $\mathbb{R}^2$

$$[w,x,y]\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}\boxed{U \quad V}\\ \boxed{\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}}\end{matrix} \end{bmatrix} = [w,\ U+Ax+Cy,\ V+Bx+Dy]$$

Em coordenadas cartesianas:

$$M((X,Y)) = (X,Y)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + (U,V)$$

Translação pelo vetor cartesiano (U, V):

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ Uw + x,\ Vw + y\ \right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1, U+X, V+Y] = (X,Y) + (U,V)$$

Transformações afins: Escala

Mudança de escala por fatores α em X e β em Y:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ \alpha x,\ \beta y\ \right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,\alpha X,\beta Y] = (\alpha X,\beta Y)$$

Rotação anti-horária por θ radianos:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \\ &= \left[\, w,\ cx - sy,\ sx + cy \,\right] \end{aligned}$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1, cX - sY, sX - cY] = (cX - sY, sX - cY)$$

Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos):

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\; w,\ -y,\ x \;] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-Y,+X] = (-Y,+X)$$

Cisalhamento na direção X proposcional a Y com fator α:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ x+\alpha y,\ y\ \right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1, X+\alpha Y, Y] = (X+\alpha Y, Y)$$

Espelhamento na direção X pelo eixo Y:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\ w,\ -x,\ y\ \right]
\end{aligned}
$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,Y] = (-X,Y)$$

Rotaão por 180° (π radianos), ou espelhamento pela origem:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\; w,\ -x,\ -y \;\right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,-Y] = (-X,-Y)$$

Composição de transformações projetivas M e Q aplicadas nessa ordem:

$$\begin{aligned} Q(M([w,x,y])) &= \left([w,x,y]\left[\widehat{M}\right]\right)\left[\widehat{Q}\right] \\ &= [w,x,y]\left(\left[\widehat{M}\right]\left[\widehat{Q}\right]\right) \end{aligned}$$

Por conta dessa fórmula, vamos escrever a composição na ordem de aplicação, ou seja "MQ" (em vez de $Q \circ M$ ou QM).

Então $p(MQ) = (pM)Q = pMQ$ para todo ponto p de $\mathbb{T}^2$.

Transformação afim que leva o trângulo canônico
$K = \mathsf{S}((0,0),\ (1,0),\ (0,1))$
para um trângulo qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0,Y_0),\ (X_1,Y_1),\ (X_2,Y_2))$:

$$\begin{array}{rcl} M((0,0)) & = & [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ] \\ M((1,0)) & = & [\ 1\ \ 1\ \ 0\ ] \\ M((0,1)) & = & [\ 1\ \ 0\ \ 1\ ] \end{array} \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} = [\ 1\ \ X_0\ \ Y_0\ ] \\ = [\ 1\ \ X_1\ \ Y_1\ ] \\ = [\ 1\ \ X_2\ \ Y_2\ ] \end{array}$$

Transformação afim que leva um trângulo genérico
$T' = \mathsf{S}((X'_0, Y'_0), (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X''_0, Y''_0), (X''_1, Y''_1), (X''_2, Y''_2))$:

$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T''.