O plano projetivo orientado 1

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha\mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha\mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha\mathcal{Y}'$.

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

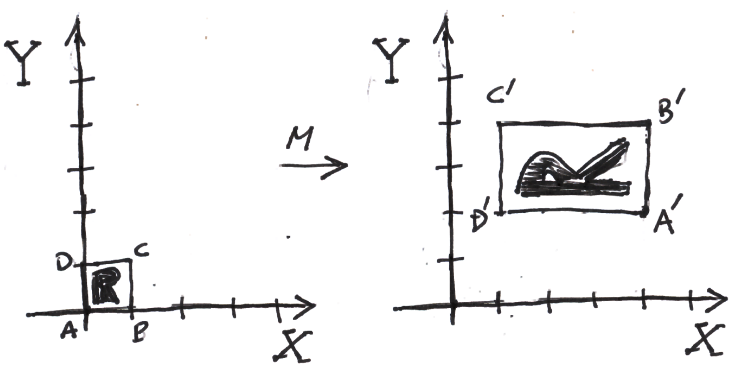
Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \\
&= \left[\ Aw + Dx + Gy,\ Bw + Ex + Hy,\ Cw + Fx + Iy\ \right]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = [\,w,\ 4w-3y,\ 2w+2x\,]$$

$M(A) = M([1,0,0]) = [1,4,2] = A'$
$M(B) = M([1,1,0]) = [1,4,4] = B'$
$M(C) = M([1,1,1]) = [1,1,4] = C'$
$M(D) = M([1,0,1]) = [1,1,2] = D'$



Transformações projetivas

Propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Só é válida se a matriz 3×3 $\widehat{M}$ tem determinante não nulo.
- $M(p)$ é definida para todo ponto p.
- $M(p)$ é o mesmo ponto de $\mathbb{T}^2$ quaisquer que sejam as coordenadas homogêneas escolhidas para p.
- M tem uma transformação inversa M^{-1}, tal que $M^{-1}(M(p)) = M(M^{-1}(p))$ para todo p.
- A matriz de M^{-1} é a inversa da matriz de M.
- M preserva colinearidade: $M(p), M(q), M(r)$ são colineares se e somente se p, q, r são colineares.
- M preserva segmentos: a imagem de $\mathsf{S}(p,q)$ sob M é $\mathsf{S}(M(p), M(q))$.
- Idem para triângulos e conjutos convexos em geral.
- A transformação M não se altera se a matriz $\widehat{M}$ for multiplicada por qualquer $\alpha > 0$.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for positivo, M sempre preserva a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = \Delta(p, q, r)$.
- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for negativo, M sempre inverte a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = -\Delta(p, q, r)$.
- Aprimeira linha da matriz $\widehat{M}$ é para onde vai a origem do aquém:

para onde vai a origem do aquém

$$[1,0,0]\begin{bmatrix} \boxed{A \quad B \quad C} \\ D \quad E \quad F \\ G \quad H \quad I \end{bmatrix} = [A,B,C]$$

Transformações afins

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^2$
é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito:
Se $M([w, x, y]) = [w', x', y']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

sempre

para onde vai a origem do aquém

$$[w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix}$$

transformação linear do $\mathbb{R}^2$

$$= [w,\ U + Ax + Cy,\ V + Bx + Dy]$$

Em coordenadas cartesianas:

$$M((X, Y)) = (X, Y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + (U, V)$$