O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha\mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha\mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha\mathcal{Y}'$.

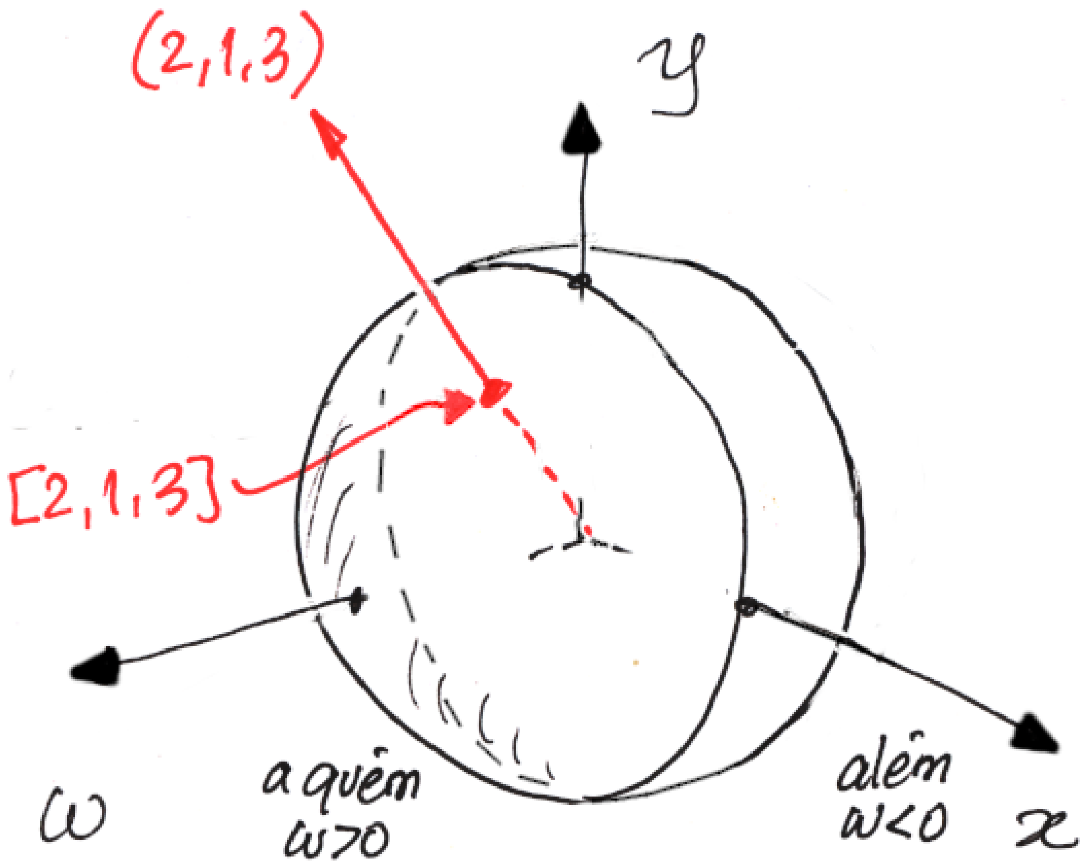
Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

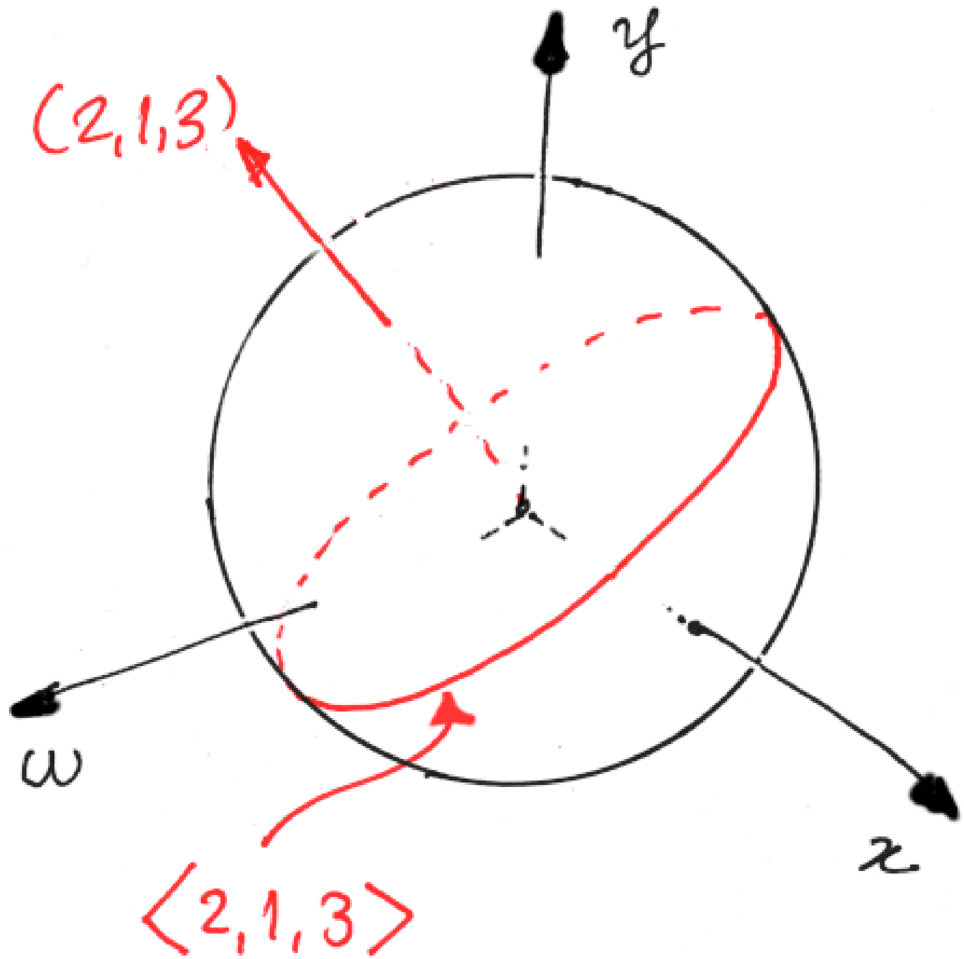
Modelo esférico - ponto

$$[w, x, y] \quad \leftrightarrow \quad \frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$



Modelo esférico - reta

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}\,\mathcal{Y} \rangle \quad \leftrightarrow \quad \text{círculo perpendicular a } (\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$$



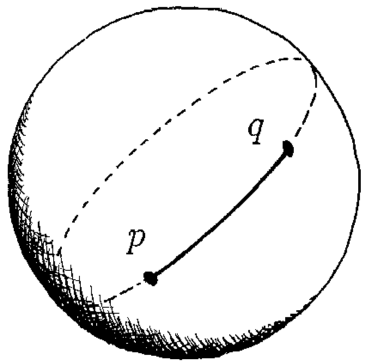
Sejam

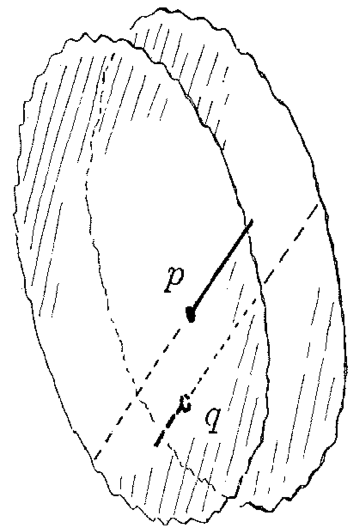
$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1] \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2] \end{aligned}$$

O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\, [\, \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2 \,] \mid \alpha, \beta \geq 0 \ \wedge\ \alpha + \beta > 0 \,\}$$

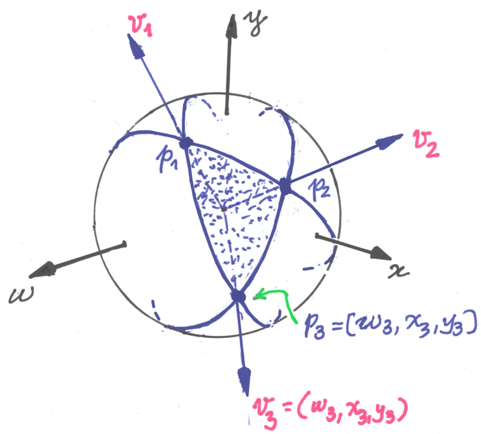
Segmentos nos modelos esférico e chato 5



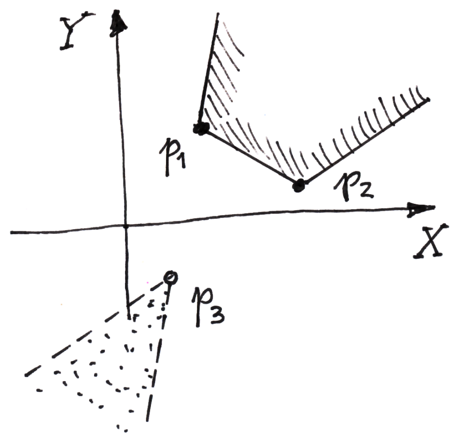


Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3]$, o *triângulo* é o ocnjunto de pontos

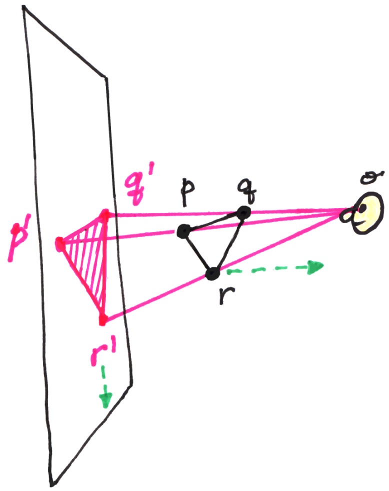
$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3) \;=\; \{\; [\; & \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\
& \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\
& \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\
]\; & \\
: \; & \\
& \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\
& \alpha + \beta + \gamma > 0 \\
\} &
\end{aligned}
$$

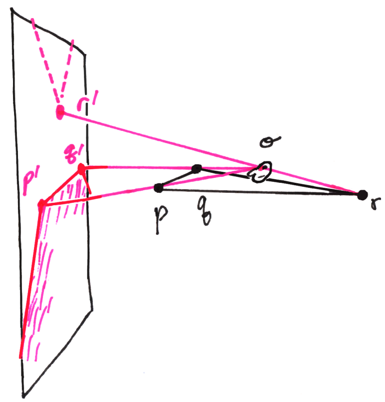


v_1
y
v_2
p_1
p_2
w
x
$p_3 = (w_3, x_3, y_3)$
$v_3 = (w_3, x_3, y_3)$



Y
p_1
p_2
X
p_3


p'
q'
p
q
o
r
r'

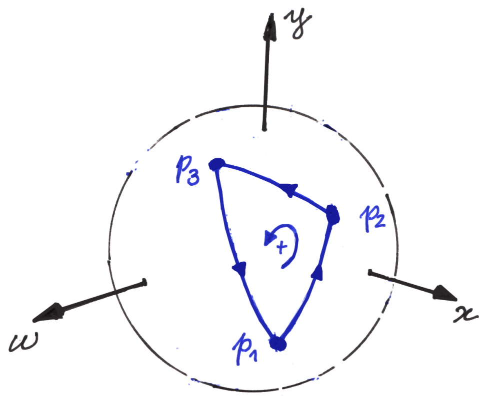

r'
o
q'
p'
p
q
r

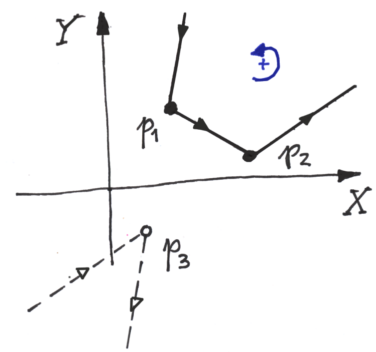
- O triângulo $\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$ não depende da ordem dos pontos.
- Os lados de $\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$ são $\mathsf{S}(p_1, p_2)$, $\mathsf{S}(p_2, p_3)$, e $\mathsf{S}(p_3, p_1)$,
- $\mathsf{S}(p_1, p_1, p_2)$ é o segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.
- $\mathsf{S}(p_1, p_1, p_1)$ é o conjunto $\{p_1\}$.
- $\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$ é indefinido se e somente se um dos lados contém o antípoda do vértice oposto.
- Se $u, v \in \mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$ então $\mathsf{S}(u, v) \subseteq \mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$.
- Se $u, v, w \in \mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$ então $\mathsf{S}(u, v, w) \subseteq \mathsf{S}(p_1, p_2, p_3)$.

Orientação de 3 pontos

Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3]$, sua *orientação* é o sinal do determinante

$$\begin{aligned}\Delta(p_1, p_2, p_3) &= \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sgn}(w_1x_2y_3 + x_1y_2w_3 + y_1w_2x_3 - y_1x_2w_3 - x_1w_2y_3 - w_1y_2x_3)\end{aligned}$$


y
p_3
p_2
+
p_1
w
x


Y
+
p_1
p_2
X
p_3

$$\begin{aligned}\Delta(p_2,p_1,p_3) &= \\ \Delta(p_3,p_2,p_1) &= \\ \Delta(p_1,p_3,p_2) &= -\Delta(p_1,p_2,p_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\neg p_1,p_2,p_3) &= \\ \Delta(p_1,\neg p_2,p_3) &= \\ \Delta(p_1,p_2,\neg p_3) &= -\Delta(p_1,p_2,p_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(p_1,p_1,p_3) &= \\ \Delta(p_1,p_2,p_2) &= \\ \Delta(p_1,p_2,p_1) &= 0\end{aligned}$$

Os três pontos são colineares se e somente se $\Delta(p_1,p_2,p_3) = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1, p_2, p_3) &= \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \operatorname{sgn}\left(+w_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1, p_2, p_3) &= p_1 \diamond (p_2 \vee p_3) \\
&= p_2 \diamond (p_3 \vee p_1) \\
&= p_3 \diamond (p_1 \vee p_2)
\end{aligned}$$