O plano projetivo orientado 1

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

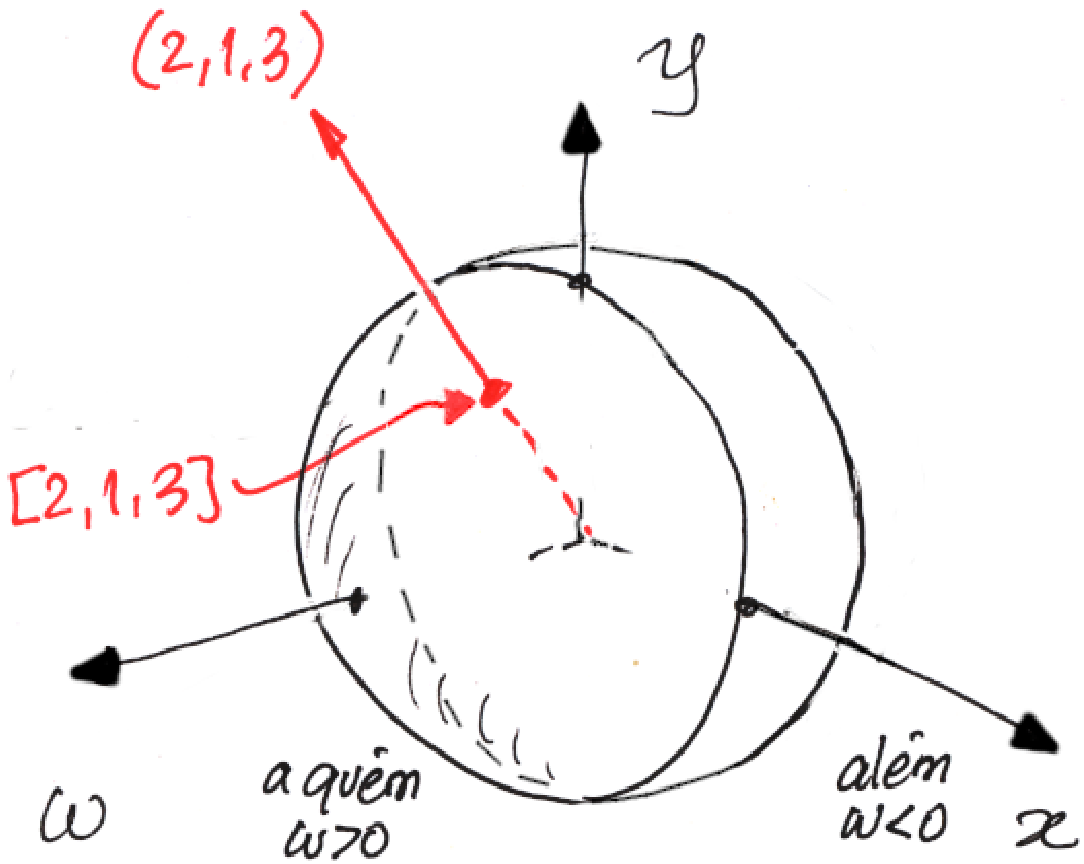
Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

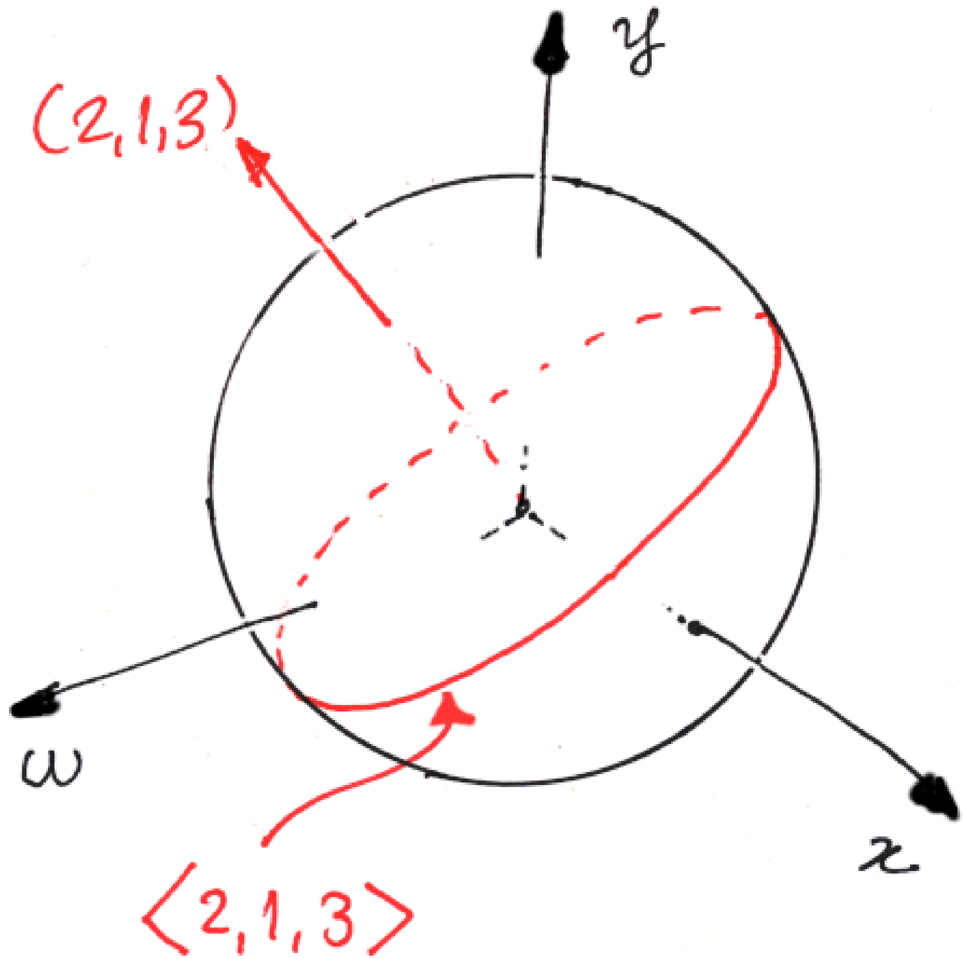
Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Modelo esférico - ponto

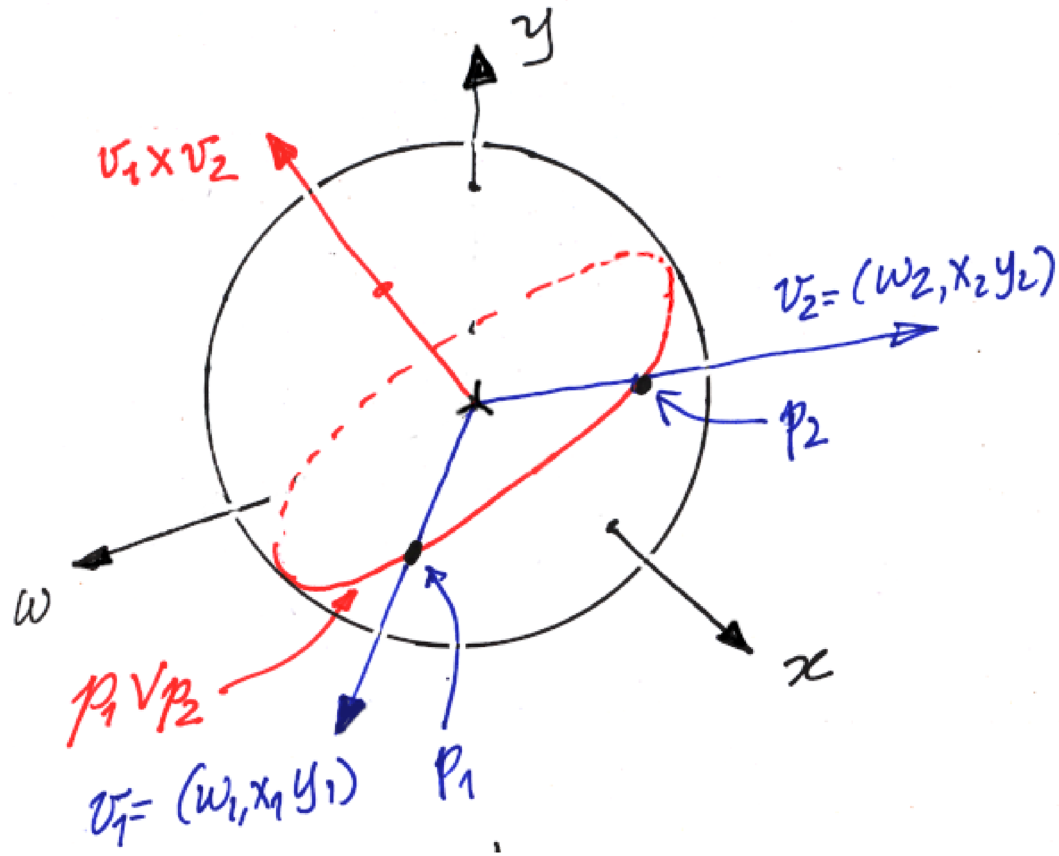
$$[w, x, y] \quad \leftrightarrow \quad \frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$



$\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}\, \mathcal{Y} \rangle \quad \leftrightarrow \quad$ círculo perpendicular a $(\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$



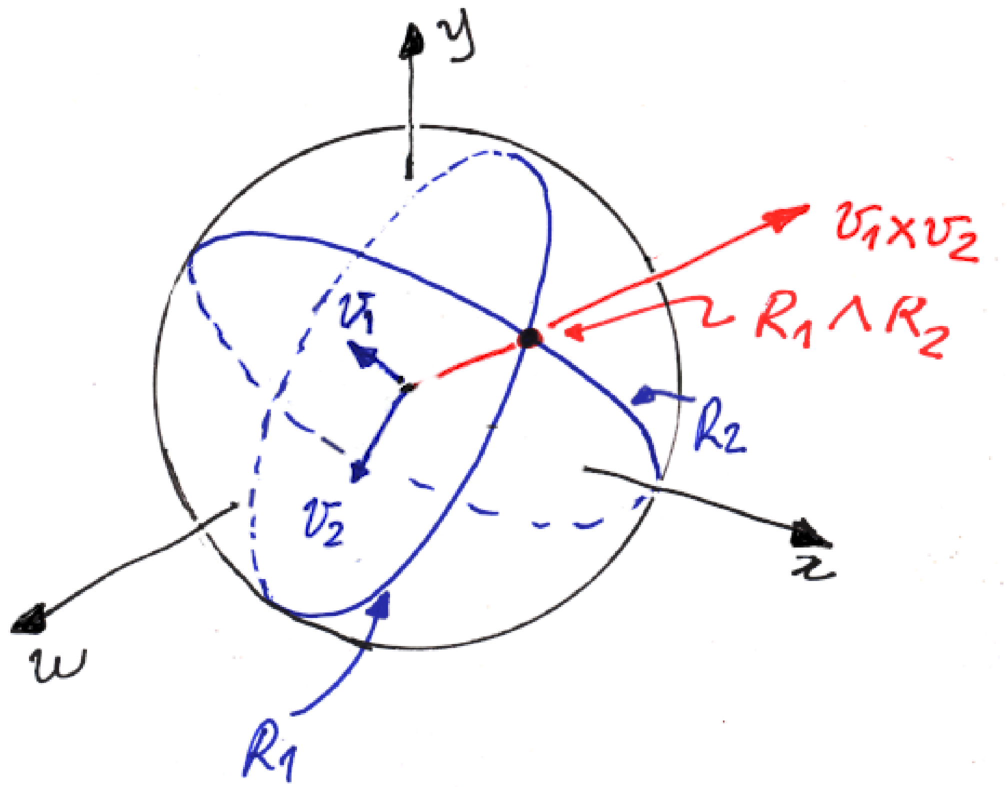
Modelo esférico - reta por dois pontos



Modelo esférico - reta por dois pontos

Dados pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ e $p_2 = [w_2, x_2, y_2]$, a reta p_1 *junta* p_2 é

$$\begin{aligned} p_1 \vee p_2 &= \left\langle +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} \right\rangle \\ &= \langle\, x_1y_2 - x_2y_1,\ y_1w_2 - y_2w_1,\ w_1x_2 - w_2x_1 \,\rangle \end{aligned}$$


y
$v_1 \times v_2$
$R_1 \wedge R_2$
v_1
v_2
R_2
z
w
R_1

Dadas duas retas $R_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \rangle$ e $R_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2 \rangle$, o ponto R_1 *encontra* R_2 é

$$
\begin{aligned}
R_1 \wedge R_2 &= \left[+ \begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \end{vmatrix} \right] \\
&= [\, \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2 - \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_1\mathcal{W}_2 - \mathcal{Y}_2\mathcal{W}_1,\ \mathcal{W}_1\mathcal{X}_2 - \mathcal{W}_2\mathcal{X}_1 \,]
\end{aligned}
$$

Algumas propriedades de $\vee$ e $\wedge$:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
q \vee p & = & \neg(p \vee q) & S \wedge R & = & \neg(R \wedge S) \\
p \vee (\neg q) & = & \neg(p \vee q) & R \wedge (\neg S) & = & \neg(R \wedge S) \\
(\neg p) \vee q & = & \neg(p \vee q) & (\neg R) \wedge S & = & \neg(R \wedge S) \\
p \vee p & = & \langle 0,0,0 \rangle & R \wedge R & = & [0,0,0] \\
p \vee (\neg p) & = & \langle 0,0,0 \rangle & R \wedge (\neg R) & = & [0,0,0]
\end{array}
$$