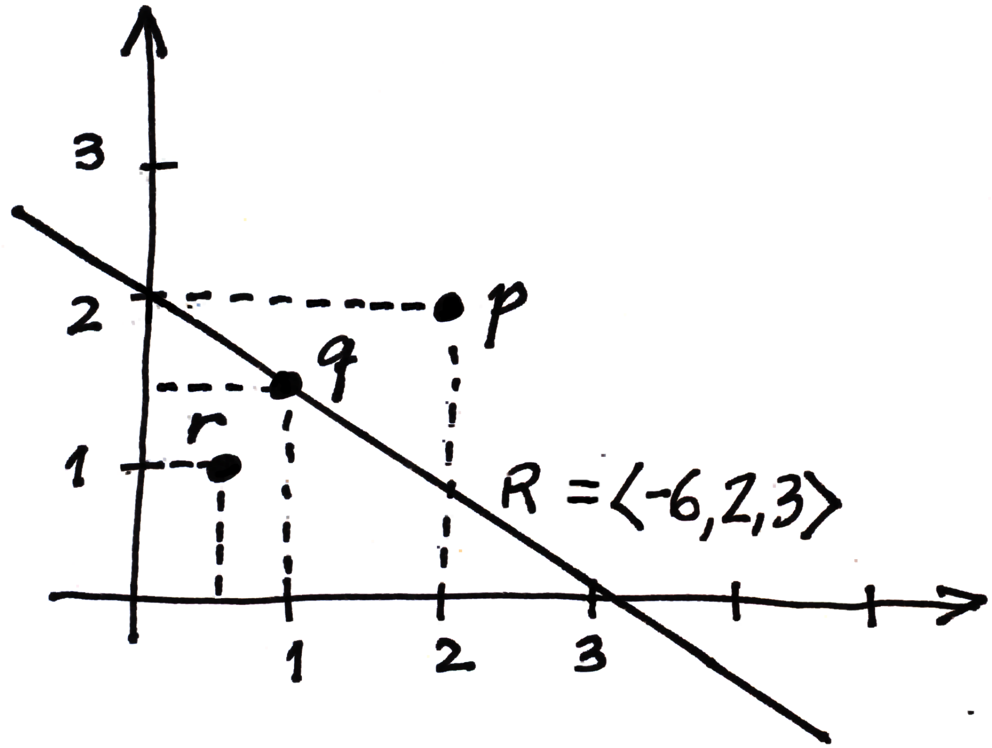
Posição relativa de ponto e reta 1

A *posição* do ponto $p = [w, x, y]$ em relação à reta $R = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ é

$$p \diamond R = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y) = \begin{cases} -1 & \textit{lado negativo} \\ \ \ 0 & \textit{sobre} \\ +1 & \textit{lado positivo} \end{cases}$$

onde $\operatorname{sgn}(x)$ é o sinal de x (-1, 0, ou $+1$).

Posição relativa de ponto e reta



$$
\begin{array}{lcll}
p \diamond R = [1,2,2] \diamond \langle -6,2,3\rangle = \mathrm{sgn}(-6+4+6) & = \mathrm{sgn}(+4) & = & +1 \\
q \diamond R = [3,3,4] \diamond \langle -6,2,3\rangle = \mathrm{sgn}(-18+6+12) & = \mathrm{sgn}(0) & = & 0 \\
r \diamond R = [2,1,2] \diamond \langle -6,2,3\rangle = \mathrm{sgn}(-12+2+6) & = \mathrm{sgn}(-4) & = & -1
\end{array}
$$

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.

Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Pela definição do $\mathbb{T}^2$, as retas $R = \langle -6, +2, +3\rangle$ e $S = \langle +6, -2, -3\rangle$ são distintas.

Elas passam pelos mesmos pontos:

$$[w, x, y] \diamond R = 0 \Leftrightarrow -6w{+}2x{+}3y = 0 \Leftrightarrow +6w{-}2x{-}2y = 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = 0$$

Mas os lados positvos e negativos são invertidos:

$$[w, x, y] \diamond R = +1 \Leftrightarrow -6w{+}2x{+}3y > 0 \Leftrightarrow +6w{-}2x{-}2y < 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = -1$$

$$[w, x, y] \diamond R = -1 \Leftrightarrow -6w{+}2x{+}3y < 0 \Leftrightarrow +6w{-}2x{-}2y > 0 \Leftrightarrow [w, x, y] \diamond S = +1$$

Em geral, a reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ é distinta da *reta oposta* $\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}\rangle$, embora passe pelos mesmos pontos. A diferença é qual lado é positivo, e qual é negativo.

Pela definição, o $[-2, -3, -5]$ é um ponto vãlido de $\mathbb{T}^2$, distinto de $[2, 3, 5]$.

Por convenção, ambos tem as mesmas coordenadas cartesianas: $(-3/-2, -5/-2) = (3/2, 5/2)$.

Para manter a distinção, imaginamos que o plano $\mathbb{R}^2$ é uma folha infinita de papel, e que $[2, 3, 5]$ está "na frente" dessa folha (no *aquém* do $\mathbb{R}^2$), enquanto que $[-2, -3, -5]$ está na mesma posição mas "no verso" da folha (no *além* do $\mathbb{R}^2$).

De modo geral, a *interpretação cartesiana* de um ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$ é

O ponto $(x/w, y/w)$ do aquém do $\mathbb{R}^2$, se $w > 0$;

O ponto no infinito na direção (x, y) do aquém, se $w = 0$;

O ponto $(x/w, y/w)$ do além do $\mathbb{R}^2$, se $w < 0$.

O ponto $[-w, -x, -y]$ é o *antípoda* de $[w, x, y]$, denotado por $\neg[w, x, y]$

Pontos antípodas - aquém e além