

# MC909 – Computação Gráfica

© Jorge Stolfi

Primeiro Semestre de 1995

Notas de Aula – Fascículo 2

## Algoritmos Geométricos Elementares

### 2.1 Usando coordenadas homogêneas

De modo geral, qualquer fórmula da geometria analítica plana pode ser adaptada para coordenadas homogêneas, bastando substituir na mesma as coordenadas cartesianas  $X$  e  $Y$  por  $x/w$  e  $y/w$ , respectivamente. (Se a fórmula descreve as coordenadas de um ponto, precisamos também trocar os parênteses da mesma por colchetes, e acrescentar uma coordenada 1 inicial (o peso).)

#### 2.1.1 Ponto médio

Por exemplo, em geometria cartesiana, sabemos que o ponto médio  $m$  do segmento com extremos  $p_0 = (X_0, Y_0)$  e  $p_1 = (X_1, Y_1)$  é dado por

$$m = \left( \frac{X_0 + X_1}{2}, \frac{Y_0 + Y_1}{2} \right)$$

Portanto, em termos de coordenadas homogêneas, se os extremos forem os pontos do aquém  $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$  e  $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ , esta fórmula equivale a

$$\begin{aligned} m &= \left[ 1, \frac{x_0/w_0 + x_1/w_1}{2}, \frac{y_0/w_0 + y_1/w_1}{2} \right] \\ &= \left[ 1, \frac{x_0w_1 + x_1w_0}{2w_0w_1}, \frac{y_0w_1 + y_1w_0}{2w_0w_1} \right] \end{aligned}$$

Podemos eliminar as divisões desta fórmula, multiplicando as três coordenadas homogêneas por  $w_0w_1$ , o que não altera o ponto  $m$ . Obtemos assim a fórmula

$$m = [ 2w_0w_1, w_1x_0 + w_0x_1, w_1y_0 + w_0y_1 ] \quad (2.1)$$

**Ex. 2.1:** Calcule as coordenadas homogêneas do ponto do aquém que está a  $1/3$  do caminho entre os pontos  $[1, 2, 3]$  e  $[2, 3, 5]$ .

**Ex. 2.2:** O que acontece com o ponto médio de  $p_0$  e  $p_1$ , conforme definido pela fórmula (2.1), se um dos pontos estiver no infinito? E se ambos estiverem no infinito?

**Ex. 2.3:** Qual a posição do ponto definido pela fórmula (2.1), se um dos pontos estiver no aquém, e o outro no além? E se ambos estiverem no além?

**Ex. 2.4:** Uma fórmula para o ponto médio que dá resultados mais consistentes para pontos do além é

$$m = [ |w_1|w_0 + |w_0|w_1, |w_1|x_0 + |w_0|x_1, |w_1|y_0 + |w_0|y_1 ]$$

Compare o resultado desta fórmula com o de (2.1) para os 6 casos:  $p_0$  e  $p_1$  ambos no aquém, ambos no além, um no aquém e um no além, um no aquém e outro infinito, um no além e outro infinito, e ambos no infinito.

**Ex. 2.5:** Dê uma fórmula homogênea, sem divisões, para o centro de gravidade de um triângulo com vértices  $p_i = [w_i, x_i, y_i]$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

**Ex. 2.6:** Determine uma fórmula homogênea, sem divisões, para o ponto  $m$  que divide o segmento  $p_0p_1$  em duas partes cujos comprimentos estão na razão  $\lambda_0 : \lambda_1$ . Suponha que  $p_0, p_1$ , e  $m$  estão no aquém, e  $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$ .

### 2.1.2 Colinearidade de três pontos

Dizemos que três pontos são *colineares* se eles pertencem a uma mesma reta. O que isto significa em termos de coordenadas homogêneas?

Para começar, vamos supor que os três pontos estão no aquém. Em geometria cartesiana, prova-se que três pontos  $p_0 = (X_0, Y_0)$ ,  $p_1 = (X_1, Y_1)$ , e  $p_2 = (X_2, Y_2)$  são colineares se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Em termos das coordenadas homogêneas  $[w_i, x_i, y_i]$  dos três pontos, esta fórmula equivale a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0/w_0 & y_0/w_0 \\ 1 & x_1/w_1 & y_1/w_1 \\ 1 & x_2/w_2 & y_2/w_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

Podemos multiplicar as três linhas desta matriz por  $w_0$ ,  $w_1$ , e  $w_2$ , respectivamente, pois isto apenas multiplica o determinante pelo número positivo  $w_0w_1w_2$ , o que não afeta a equação. Concluímos que os três pontos do aquém são colineares se e somente se

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

Na verdade, a fórmula (2.3) vale para *quaisquer* tres pontos de  $\mathbb{T}^2$ , finitos ou infinitos, no aquém ou no além. Este resultado pode ser demonstrado sem muita dificuldade a partir do modelo esférico de  $\mathbb{T}^2$ , ou da definição algébrica de reta.

**Ex. 2.7:** Usando a fórmula (2.3), determine quais destas triplas de pontos são colineares:

- (a)  $[1, 0, 0]$ ,  $[1, 1, 0]$ ,  $[1, 0, 1]$ .
- (b)  $[1, 0, 0]$ ,  $[1, 1, 0]$ ,  $[1, 2, 0]$ .
- (c)  $[1, 0, 1]$ ,  $[1, 2, 6]$ ,  $[1, 3, 8]$ .
- (d)  $[1, 2, 3]$ ,  $[2, 2, 3]$ ,  $[5, 2, 3]$ .

**Ex. 2.8:** Demonstre *algebricamente*, usando a fórmula 2.3, que os pontos  $p_0$ ,  $p_1$ , e  $p_2$  são colineares em cada um dos seguintes casos:

- (a)  $p_0 = p_1$ .
- (b)  $p_2$  é o ponto médio de  $p_0$  e  $p_1$ .
- (c)  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_0$  são colineares.

**Ex. 2.9:** Considere três pontos móveis  $p_0, p_1, p_2$  no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme. Ou seja, as coordenadas cartesianas de  $p_i$ , num instante  $t$  quaisquer, são  $(X_i, Y_i) + t(X'_i, Y'_i)$ , onde  $X_i, Y_i, X'_i$  e  $Y'_i$  são constantes.

- (a) Mostre como calcular o instante  $t^*$  em que esses três pontos estarão alinhados.
- (b) Analise o número de soluções  $t^*$  distintas admitidas pelo problema do item (a), discutindo todos os casos que podem ocorrer.

### 2.1.3 Reta determinada por dois pontos

Como já observamos, dois pontos não coincidentes de  $\mathbb{T}^2$  determinam duas retas que passam por eles, coincidentes mas com orientações opostas.

Podemos deduzir a fórmula para os coeficientes destas retas a partir da equação (2.3). De acordo com esta última, a condição para que um ponto genérico  $[w, x, y]$  seja colinear com  $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$  e  $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$  é

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w & x & y \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo este determinante pela última linha, obtemos

$$+ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} y = 0$$

Daqui se deduz que uma das duas retas que passam por  $p_0$  e  $p_1$  é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} p_0 \vee p_1 &= \left\langle + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} \right\rangle \quad (2.4) \\ &= \langle +x_0y_1 - x_1y_0, -w_0y_1 + w_1y_0, +w_0x_1 - w_1x_0 \rangle \end{aligned}$$

Obviamente, a outra reta que passa por  $p_0$  e  $p_1$  é

$$\neg(p_0 \vee p_1) = \langle -x_0y_1 + x_1y_0, +w_0y_1 - w_1y_0, -w_0x_1 + w_1x_0 \rangle$$

A orientação da reta  $p_0 \vee p_1$ , implícita na fórmula (2.4), tem um significado geométrico bastante simples, que será visto na seção 2.2.5.

**Ex. 2.10:** Determine as duas retas que passam pelos pontos  $[1, 2, 3]$  e  $[4, 5, 6]$ .

**Ex. 2.11:** Determine a reta que passa pelo ponto do eixo  $X$  com abscissa  $X_0$ , e pelo ponto do eixo  $Y$  com ordenada  $Y_0$ .

**Ex. 2.12:** Determine a reta que passa pela origem e pelo ponto  $(X, Y)$ .

**Ex. 2.13:** O que acontece com a fórmula (2.4), quando os pontos  $p_0$  e  $p_1$  coincidem?

### 2.1.4 Reta por pontos no infinito

Pode-se verificar que a fórmula (2.4) vale para quaisquer dois pontos — no aquém, no além, ou infinitos — que não sejam iguais ou antipodais.

Esta flexibilidade é útil, por exemplo, quando queremos calcular os coeficientes da reta  $r$  que passa por um ponto finito  $p = [w_p, x_p, y_p]$  e é paralela a um certo vetor  $d = (x_d, y_d)$ . Esta reta contém o ponto infinito  $\infty d = [0, x_d, y_d]$ ; ou seja,  $r = p \vee (\infty d)$ . Portanto, não precisamos desenvolver (e programar) uma fórmula especial para este problema; basta usar a fórmula (2.4), da reta  $p_0 \vee p_1$ , com  $p_0 = p$  e  $p_1 = \infty d$ .

**Ex. 2.14:** Determine os coeficientes da reta que passa por  $[2, 3, 4]$  e é paralela ao vetor  $(-2, 3)$ .

**Ex. 2.15:** Determine a fórmula geral explícita para os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano  $(X, Y)$  e faz um ângulo anti-horário de  $\theta$  radianos com o eixo  $X$ .

**Ex. 2.16:** Diga como calcular os coeficientes da reta que passa por um ponto finito  $p = [w_p, x_p, y_p]$  e é *perpendicular* a um vetor cartesiano  $d = (x_d, y_d)$ .

**Ex. 2.17:** O que acontece com a reta  $p_0 \vee p_1$  (fórmula (2.4)), quando os pontos  $p_0$  e  $p_1$  são ambos infinitos?

### 2.1.5 Ponto determinado por duas retas

Na geometria euclidiana, aprendemos que duas retas  $r_0 = \langle \mathcal{W}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \rangle$  e  $r_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \rangle$ , distintas e não paralelas, se cruzam num único ponto, que vamos denotar por  $r_0 \wedge r_1$ .

As coordenadas cartesianas  $(X, Y)$  desse ponto devem satisfazer as duas equações  $\mathcal{W}_i + \mathcal{X}_i X + \mathcal{Y}_i Y = 0$ ; e portanto podem ser calculadas resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 X + \mathcal{Y}_0 Y = -\mathcal{W}_0 \\ \mathcal{X}_1 X + \mathcal{Y}_1 Y = -\mathcal{W}_1 \end{cases}$$

Segundo a regra de Cramer, a solução deste sistema é

$$X = -\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}}, \quad Y = -\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{W}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}} \quad (2.5)$$

Convertendo o par  $(X, Y)$  para coordenadas homogêneas, e multiplicando as mesmas pelo denominador comum, concluímos que o ponto de intersecção das duas retas é dado pela fórmula

$$r_0 \wedge r_1 = \left[ + \begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \end{vmatrix} \right] \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{l} +\mathcal{X}_0\mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_0, \\ -\mathcal{W}_0\mathcal{Y}_1 + \mathcal{W}_1\mathcal{Y}_0, \\ +\mathcal{W}_0\mathcal{X}_1 - \mathcal{W}_1\mathcal{X}_0 \end{array} \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

**Ex. 2.18:** Usando a fórmula 2.7, determine o ponto de encontro  $r \wedge s$  para os seguintes pares de retas:

(a)  $r = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad s = \langle 0, 0, 1 \rangle$

(b)  $r = \langle 0, 0, 1 \rangle \quad s = \langle 0, 1, 0 \rangle$

(c)  $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 2, 4, 6 \rangle$

(d)  $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 1, 0, 0 \rangle$

(d)  $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 2, 3, 5 \rangle$

Apesar da fórmula (2.7) ter sido desenvolvida sob a hipótese do ponto de encontro ser finito, pode-se verificar que ela vale para quaisquer duas retas não coincidentes, mesmo as que se encontram no infinito. Veja os exercícios 2.19, e 2.20.

**Ex. 2.19:** Verifique algebricamente que o ponto  $r \wedge s$ , calculado pela fórmula (2.7), sempre pertence às retas  $r$  e  $s$ .

**Ex. 2.20:** Prove que duas retas  $r$  e  $s$ , ordinárias e não coincidentes, são paralelas se e somente se  $r \wedge s$  é um ponto infinito.

**Ex. 2.21:** Determine o ponto de encontro das retas que passam pelos pontos de abscissa  $+1$  e  $-1$  do eixo  $X$ , e formam ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  com o mesmo, respectivamente.

**Ex. 2.22:** O que acontece com a fórmula (2.7), quando as retas  $r_0$  e  $r_1$  coincidem (são iguais ou opostas)?

Já observamos antes que, no plano  $\mathbb{T}^2$ , duas retas não coincidentes se encontram em *dois* pontos antipodais. A fórmula (2.7) dá apenas um desses pontos. Qual deles? Os exercícios 2.23 e 2.24 respondem em parte a essa pergunta; a resposta completa será vista na seção 2.2.7.

**Ex. 2.23:** A partir da fórmula (2.7), mostre que

$$(\neg r_0) \wedge r_1 = r_0 \wedge (\neg r_1) = \neg(r_0 \wedge r_1)$$

**Ex. 2.24:** A partir da fórmula (2.7), mostre que  $r_1 \wedge r_0 = \neg(r_0 \wedge r_1)$

**Ex. 2.25:** Usando a fórmula (2.7), determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta genérica  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$  com a reta  $\Omega$ . Qual o significado geométrico desse ponto?

## 2.1.6 Dualidade

Leitores atentos provavelmente notaram a semelhança entre as fórmulas da reta que passa por dois pontos (2.4) e do ponto de intersecção de duas retas (2.7).

Esta semelhança é uma manifestação de um princípio muito importante, a *dualidade* entre pontos e retas do plano projetivo. Considere

a função que ao ponto  $p = [w, x, y]$  associa a reta  $p^* = \langle w, x, y \rangle$ ; e à reta  $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$  associa o ponto  $r^* = [\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ . É fácil ver que um ponto  $p$  está numa reta  $r$  se e somente se a reta  $p^*$  passa pelo ponto  $r^*$ ; e, na verdade,

$$r \diamond p = p^* \diamond r^*$$

Com um pouco mais de trabalho, pode-se concluir que

$$(p_0 \vee p_1)^* = (p_0)^* \wedge (p_1)^*$$

para quaisquer dois pontos  $p_0, p_1$ . Como  $(p^*)^* = p$ , temos também

$$(m_0 \wedge m_1)^* = (m_0)^* \vee (m_1)^*$$

para quaisquer duas linhas  $m_0, m_1$ .

A função ‘\*’ é a *dualidade canônica* de  $\mathbb{T}^2$ . Ela nos permite traduzir mecanicamente muitas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem linhas, e vice-versa. O mesmo vale para teoremas, algoritmos, e estruturas de dados. Com isto, o custo de desenvolvimento e programação de algoritmos geométricos fica substancialmente reduzido, quase que pela metade.

**Ex. 2.26:** Qual é o dual canônico dos seguintes objetos e conceitos:

- (a) Um ponto do aquíem.
- (b) Um ponto no infinito.
- (c) O antípoda de um ponto.
- (d) A origem do aquíem.
- (e) O eixo  $X$ .
- (f) Um segmento  $pq$ .

## 2.2 Orientação

### 2.2.1 Orientação de três pontos

Sejam  $p, q$ , e  $r$  três pontos não colineares contido no aquíem. Informalmente, a *orientação* da tripla  $(p, q, r)$  é o sentido (horário ou anti-horário) em que o segmento  $pu$  roda em torno de  $p$ , quando o ponto  $u$  vai de  $q$  para  $r$  ao longo do segmento  $qr$ .



Observe que a ordem dos pontos é importante. Por exemplo, a tripla  $((1, 1), (3, 2), (2, 4))$  tem orientação anti-horária enquanto que  $((1, 1), (2, 4), (3, 2))$  tem orientação horária.

Os termos *horário* e *anti-horário* pressupõem a convenção usual que o eixo  $Y$  do plano cartesiano é desenhado a  $90^\circ$  do eixo  $X$ , no sentido anti-horário. Para não dependermos dessa convenção puramente gráfica, chamaremos os dois sentidos de rotação de *negativo* e *positivo*; sendo que, por definição, a tripla  $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$  tem orientação positiva.

Mais formalmente, definimos a função  $\Delta(p, q, r)$ , que vale  $-1$  ou  $+1$ , conforme a tripla  $(p, q, r)$  tenha orientação negativa ou positiva, respectivamente; e que vale  $0$  se os três pontos são colineares.

**Ex. 2.27:** Determine o valor de  $\Delta(p, q, r)$  para cada uma das triplas abaixo:

$$(a) \quad p = [1, 0, 0] \quad q = [1, 1, 0] \quad r = [1, 0, 1]$$

$$(b) \quad p = [1, 0, 0] \quad q = [1, 3, 2] \quad r = [2, 5, 3]$$

$$(c) \quad p = [1, 2, 3] \quad q = [1, 4, 4] \quad r = [2, 8, 9]$$

Na seção 1.5.3 definimos o triângulo  $pqr$  como sendo um conjunto de pontos, incluindo os vértices, lados, e interior. Portanto, estritamente falando, o triângulo não depende da ordem dos seus vértices. Entretanto, abusando um pouco da linguagem, vamos freqüentemente escrever “orientação do triângulo  $pqr$ ” em vez de “orientação da tripla  $(p, q, r)$ ”

### 2.2.2 Orientação algébrica

Vimos na seção 2.1.2 que três pontos são colineares quando o determinante  $3 \times 3$  de suas coordenadas homogêneas é zero.

Verifica-se que, se esses três pontos estão no aquém, e não são colineares, o sinal desse mesmo determinante é precisamente a orientação do triângulo determinado por esses três pontos.

Ou seja, se  $p_i = [w_i, x_i, y_i]$ , para  $i = in\{0, 1, 2\}$ , temos

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Em álgebra linear aprendemos que multiplicar uma linha de uma matriz por uma constante  $\alpha$  também multiplica seu determinante por  $\alpha$ . Decorre daí que o sinal do determinante acima não se altera se substituirmos as triplas homogêneas  $[w_i, x_i, y_i]$  por quaisquer outras triplas equivalentes. Ou seja, o valor da função  $\Delta(p_0, p_1, p_2)$  depende apenas das posições dos pontos, e não da escolha dos pesos  $w_i$ .

Observe também que se trocarmos a ordem de quaisquer duas linhas da matriz, o sinal do determinante se inverte. Portanto, a orientação de um triângulo também se inverte quando trocamos quaisquer dois de seus vértices. Ou seja,

$$\Delta(q, p, r) = \Delta(p, r, q) = \Delta(r, q, p) = -\Delta(p, q, r) \quad (2.9)$$

**Ex. 2.28:** Determine *algebricamente* o valor de  $\Delta(p, q, r)$ , usando a fórmula (2.8), para cada um dos triângulos

$$(a) \quad p = [1, 0, 0] \quad q = [1, 1, 0] \quad r = [1, 0, 1]$$

$$(b) \quad p = [1, 0, 0] \quad q = [1, 3, 2] \quad r = [2, 5, 3]$$

$$(c) \quad p = [1, 2, 3] \quad q = [1, 4, 4] \quad r = [2, 8, 9]$$

**Ex. 2.29:** Qual o efeito de uma permutação circular dos argumentos de  $\Delta$ ? Isto é, qual a relação entre  $\Delta(p, q, r)$ ,  $\Delta(q, r, p)$ , e  $\Delta(r, p, q)$ ?

**Ex. 2.30:** Demonstre que os triângulos  $pqr$ ,  $pmr$  e  $mqr$  têm a mesma orientação, se  $m$  for o ponto médio do segmento  $pq$ .

### 2.2.3 Orientação no além

Até agora só definimos a função  $\Delta$  para pontos do aquém. Como fica esse conceito quando alguns dos pontos estão no infinito, ou no além?

Como o conceito intuitivo de “sentido de rotação” não é muito claro nesses casos, vamos adotar a fórmula (2.8) como sendo a *definição* da função  $\Delta$ , para quaisquer três pontos de  $\mathbb{T}^2$ .

Observe que o determinante da fórmula (2.8) muda de sinal se multiplicarmos qualquer linha por  $-1$ . Portanto, se trocarmos qualquer vértice pelo seu antípoda, a orientação do triângulo se inverte. Ou seja,

$$\Delta(\neg p_0, p_1, p_2) = -\Delta(p_0, p_1, p_2) \quad (2.10)$$

Portanto,

$$\Delta(\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2) = -\Delta(p_0, p_1, p_2) \quad (2.11)$$

Em particular, a orientação de um triângulo no além é oposta à do triângulo coincidente no aquém.

**Ex. 2.31:** Usando as equações (2.9) e (2.10), determine a orientação dos pontos abaixo, sabendo que  $\Delta(p, q, r) = +1$ :

- |                            |                                 |
|----------------------------|---------------------------------|
| (a) $\Delta(p, q, \neg r)$ | (b) $\Delta(p, \neg q, \neg r)$ |
| (c) $\Delta(p, \neg r, q)$ | (d) $\Delta(q, r, \neg p)$      |

### 2.2.4 Orientação no modelo esférico

O significado geométrico da função  $\Delta$  é relativamente fácil de visualizar no modelo esférico.

Em primeiro lugar, vamos definir informalmente o *sentido positivo de rotação* em torno de um ponto qualquer  $p$  de  $\mathbb{S}^2$ , como sendo o sentido anti-horário se visto de um ponto exterior à esfera mas arbitrariamente próximo de  $p$ .

Esta definição pressupõe que os eixos de  $\mathbb{R}^3$  estão dispostos de maneira usual; ou seja que os vetores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , e  $(0, 0, 1)$ , nessa ordem, rodam em sentido anti-horário quando vistos do ponto  $(1, 1, 1)$ .

Com esta definição, podemos então verificar que  $\Delta(p, q, r)$  indica o sentido em que o segmento  $pu$  roda em torno de  $p$ , quando o ponto  $u$  vai de  $q$  para  $r$  ao longo do segmento  $qr$ . Veja a figura 2.1.

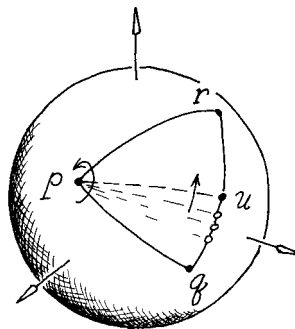


Figura 2.1: Orientação de um triângulo no modelo esférico.

### 2.2.5 Orientação da reta por dois pontos

Estamos agora em condições de esclarecer uma dúvida que restou da seção 2.1.3: qual é a orientação da reta  $p_0 \vee p_1$ , definida pela fórmula (2.4).

Para esse fim, vamos testar a posição de um ponto genérico  $p_2 = [w_2, y_2, x_2]$  em relação à mesma:

$$(p_0 \vee p_1) \diamond p_2 = \text{sgn} \left( + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w_2 - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} y_2 \right)$$

Note que a fórmula dentro dos parênteses é simplesmente a expansão, pela última linha, do determinante da matriz de coordenadas dos três pontos  $p_0, p_1, p_2$ . Como vimos, o sinal desse determinante define a orientação do triângulo  $p_0, p_1, p_2$ .

Concluimos portanto que *o lado positivo da reta  $p_0 \vee p_1$  consiste de todos os pontos  $p_2$  que formam um triângulo positivo com  $p_0$  e  $p_1$* . Formalmente,

$$(p_0 \vee p_1) \diamond p_2 = \Delta(p_0, p_1, p_2) \quad (2.12)$$

**Ex. 2.32:** Mostre que a reta de  $p_1$  a  $p_0$  tem orientação contrária à reta de  $p_0$  a  $p_1$ ; isto é,  $p_1 \vee p_0 = \neg(p_0 \vee p_1)$ .

**Ex. 2.33:** Qual é o lado positivo da reta  $p \vee (\infty d)$ ?

### 2.2.6 Orientação longitudinal de uma reta

Por definição, a *orientação externa* (ou *transversal*) de uma reta é simplesmente a especificação de qual lado da mesma é o lado positivo.

A partir da orientação externa de uma reta e do conceito de rotação positiva em torno de um ponto, podemos definir a *orientação interna* (ou *longitudinal*) da reta como sendo o sentido de percurso da mesma que circunda os pontos do seu hemisfério positivo no sentido positivo.

Ou seja, se  $p$  e  $q$  são dois pontos de uma reta  $r$ , tais que  $p \vee q = r$ , a orientação interna de  $r$  é o sentido de percurso da mesma que corresponde a ir de  $p$  para  $q$  ao longo do segmento  $pq$ .

No modelo esférico, a orientação externa pode ser visualizada como uma seta  $t$  perpendicular à reta, afixada a qualquer ponto da mesma, apontando do lado negativo para o positivo. A orientação interna pode

ser visualizada como uma seta  $u$  ao longo da reta, dirigida de tal forma que o sentido rotação de  $u$  para  $t$  pelo menor ângulo seja positivo.

No modelo plano, as convenções gráficas acima só podem ser usadas no caso de retas ordinárias. Neste caso, é importante observar que as setas que indicam a orientação longitudinal de uma reta são paralelas no aquém e no além; enquanto que as setas da orientação transversal no aquém são opostas às do além.

**Ex. 2.34:** Seja  $r$  uma reta ordinária, desenhada no modelo plano, com sua orientação longitudinal indicada por uma seta. Dê uma regra geométrica para determinar a orientação transversal de  $r$ , no aquém e no além, a partir da orientação longitudinal. (Suponha que os eixos  $X$  e  $Y$  têm as direções convencionais.)

**Ex. 2.35:** Desenhe cada uma das retas abaixo, no modelo plano de  $\mathbb{T}^2$ , indicando por meio de setas as orientações transversal e longitudinal, tanto no aquém quanto no além :

- (a)  $\langle 0, 1, 0 \rangle$ ;
- (b)  $\langle -2, 3, 5 \rangle$ ;
- (c)  $\langle 2, -3, -5 \rangle$ ;
- (d)  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ .

**Ex. 2.36:** Descreva geometricamente a orientação longitudinal da reta  $\Omega = \langle 1, 0, 0 \rangle$ , nos modelos planos e esférico.

### 2.2.7 Cruzamento de retas e orientação

Podemos agora responder também a outra dúvida que ficou em aberto da seção 2.1.5: se duas retas  $r$  e  $s$  se cruzam em dois pontos antipodais  $p$  e  $q$ , qual destes dois é o ponto  $r \wedge s$ , definido pela fórmula (2.7)?

Lembremos que  $r \wedge s$  só está definido se  $r$  e  $s$  não são coincidentes. Neste caso, existe uma única maneira de rodar a reta  $r$  em torno do eixo  $p-q$ , por um ângulo menor que  $180^\circ$ , que a torna igual a  $s$ , em posição e orientação.

É fácil ver que essa rotação vai ter sentidos opostos em relação a  $p$  e  $q$ . Pode-se provar que o ponto  $r \wedge s$ , calculado segundo a fórmula (2.7), é precisamente aquele ponto em que o sentido desta rotação é positivo.

Pode-se também verificar que  $r \wedge s$  é o ponto onde  $r$ , percorrida no sentido da sua orientação longitudinal, passa do hemisfério positivo de  $s$  para o hemisfério negativo.

**Ex. 2.37:** Mostre que, se  $\Delta(p, q, r) = +1$ , então  $(p \vee q) \wedge (q \vee r) = q$ .

**Ex. 2.38:** Se  $r$  é uma reta ordinária, obviamente  $r \wedge \Omega$  é um dos dois pontos infinitos de  $r$ . Qual deles? (Responda em termos geométricos, e não algébricos.)