INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP

Graduação

MC358-B Fundamentos Matemáticos da Computação

2022 - Semestre 2 - Jorge Stolfi

Exame Final - 2022-12-19

Nome legível

RA **Assinatura**

Item													TOT
Nota													

A prova é individual e sem consulta.
Não são permitidos computadores ou calculadoras.
Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.
Não separe as folhas deste caderno de prova.
Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.
Escreva seu nome completo, e assine a tinta.
O resto da prova pode ser feito todo a lápis.
Valem apenas as respostas nos espaços indicados.
Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.
Após distribuída a prova:

- **quem sair da sala não poderá retornar.**
- **depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.**

1. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais, e S o predicado tal que $S(a,b) \leftrightarrow$ "$a+2<b$". Em cada um dos itens abaixo, a frase em português deveria ser uma tradução fiel da fórmula simbólica. Identifique os erros de lógica **e de português** na frase, e escreva uma versão correta da mesma. Feito isso, diga se a frase é verdadeira ou falsa (não precisa justificar).

(a) $(\exists a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})\, S(a,b)$.
Existe pelo menos um natural a sendo que $a+2<b$, para um natural b qualquer.

resposta

V ou **F**?

(b) $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})\, S(a,b)$.
Existe um b natural sendo que $a+2<b$, para cada natural a.

resposta

V ou **F**?

(c) $(\forall b \in \mathbb{N})(\exists a \in \mathbb{N})\, S(a,b)$.
Existe pelo menos um a natural tal que um arbitrário b satisfaz $a+2<b$.

resposta

V ou **F**?

2. Suponha definidos

- H conjunto de de todos os humanos,
- M conjunto de de todos os malandros ($M \subseteq H$),
- A predicado tal que $(\forall x, y \in H)\, A(x, y) \leftrightarrow$ "x gosta de y".

Escreva as afirmações abaixo **usando notação simbólica apenas**:

(a) Quem é malandro gosta de algúem que é malandro.

resposta

(b) Quem é malandro só gosta de quem é malandro.

resposta

(c) Quem é malandro gosta de quem é malandro.

resposta

(d) Quem é malandro gosta de no máximo um malandro.

resposta

(e) Quem é malandro gosta de apenas um malandro.

resposta

3. Prove, por indução, que todo inteiro maior ou igual a 10 é a soma de números primos maiores ou iguais a 5. Por exemplo, $12 = 5 + 7$, $17 = 17$, e $21 = 5 + 5 + 11$.

resposta

4. Os *números de Fibonacci* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n maior ou igual a 2. Prove, por indução completa, que $(\forall n \in \mathbb{N})\, F_n < (13/8)^n$.

resposta

5. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B, $\mathcal{S}$ uma relação de B para C, e $\mathcal{T}$ uma relação de A para C. Em cada item abaixo, escreva uma fórmula da lógica de predicados (**sem palavras, usando apenas variáveis e símbolos, com todos os quantificadores necessários**), que expresse a afirmação dada.

(a) "A relação $\mathcal{R}$ é antissimétrica."

resposta

(b) "A relação $\mathcal{R}$ é transitiva."

resposta

(c) "$\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$" (ou seja "$\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{S}$").

resposta

6. Suponha que X e Y são conjuntos, e $R \subseteq X \times Y$. Em cada item abaixo, escreva uma fórmula do cálculo de predicados que é verdadeira se e somente se R é.

(a) uma função de X para Y.

resposta

(b) uma função injetora de X para Y.

resposta

(c) uma permutação de X.

resposta

7. Seja $\mathbb{P}$ o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja $\mathcal{D}$ a relação sobre $\mathbb{P}$ tal que

$$(\forall a, b \in \mathbb{P})\, a \mathrel{\mathcal{D}} b \leftrightarrow \big((\forall k \in \mathbb{N})\, 2^k | a \leftrightarrow 2^k | b\big)$$

Por exemplo $12 \mathrel{\mathcal{D}} 20$, $48 \mathrel{\mathcal{D}} 16$ e $7 \mathrel{\mathcal{D}} 15$, mas $10 \not\mathrel{\mathcal{D}} 12$ e $9 \not\mathrel{\mathcal{D}} 18$.
A relação $\mathcal{D}$ é de equivalência?
Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de $\mathcal{D}$. Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

resposta

8. Seja $A = 1..15$, e $\mathcal{R}$ a relação sobre A tal que $x \mathcal{R} y$ se e somente se x é ímpar e y é par, ou ambos são ímpares e $x \mid y$, ou ambos são pares e $y \mid x$. Suponha provado que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre A.

(a) A relação $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total? Justifique.

resposta

(b) Desenhe o diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$.

resposta

(c) Determine os elementos mínimos, minimais, máximos, e maximais de $\mathcal{R}$.

resposta

9. Dizemos que o tamanho de uma imagem é (m, n) se ela tem m linhas, cada uma com n pixels. Seja A uma imagem de tamanho (m, n), e sejam p, q dois inteiros positivos dados.

(a) Mostre como obter o tamanho (s, t) da maior imagem que cabe em A, tal que $s/t = p/q$. Por exemplo se $(m, n) = (22, 15)$, $p = 3$, e $q = 4$, então $(s, t) = (9, 12)$.

resposta

(b) Supondo determinados s, t do item (a), calcule o número k de sub-imagens desse tamanho que cabem em A sem sobreposição. No exemplo acima, $k = 2$ pois cabem 2 sub-imagens, uma acima da outra.

resposta

Importante: As respostas podem usar apenas as operações aritméticas $+$, $-$, $\times$ e $/$ (esta última sendo divisão **real**, ou seja $7/2 = 3.5$), as funções piso e teto, e as funções $\max(x, y)$ e $\min(x, y)$. Podem usar variáveis e atribuições, mas não podem usar comandos de repetição.

10. Seja $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Usando apenas manipulação de somatórias, sem usar indução, prove que

$$\sum_{j=1}^{n-1} H_j = nH_n - n$$

Dica: mude a ordem das somatórias.

resposta