

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP
Graduação
MC358-B Fundamentos Matemáticos da Computação
2022 - Semestre 2 - Jorge Stolfi
Exame Final - 2022-12-19

Nome legível

RA	Assinatura
----	------------

Item														TOT
Nota														

- A prova é individual e sem consulta.
Não são permitidos computadores ou calculadoras.
Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.
Não separe as folhas deste caderno de prova.
Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.
Escreva seu nome completo, e assine a tinta.
O resto da prova pode ser feito todo a lápis.
Valem apenas as respostas nos espaços indicados.
Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.
Após distribuída a prova:
- quem sair da sala não poderá retornar.
 - depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.

1. Sejam \mathbb{N} o conjunto dos naturais, e P o predicado tal que $P(x, y) \leftrightarrow "x + 2 > y"$. Em cada um dos itens abaixo, a frase em português deveria ser uma tradução fiel da fórmula simbólica. Identifique os erros de lógica **e de português** na frase, e escreva uma versão correta da mesma. Feito isso, diga se a frase é verdadeira ou falsa (não precisa justificar).

(a) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) P(x, y)$.

Existe pelo menos um natural x em que $x + 2 > y$, para um natural y qualquer.

resposta

V ou **F**?

(b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) P(x, y)$.

Existe um y natural em que $x + 2 > y$, para cada natural x .

resposta

V ou **F**?

(c) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) P(x, y)$.

Existe pelo menos um x natural tal que um quaisquer y satisfaz $x + 2 > y$.

resposta

V ou **F**?

2. Suponha definidos

- H conjunto de todos os humanos,
- A conjunto de todos os artistas ($A \subseteq H$),
- G predicado tal que $(\forall x, y \in H) G(x, y) \leftrightarrow$ “ x gosta de y ”.

Escreva as afirmações abaixo **usando notação simbólica apenas**:

(a) Quem é artista só gosta de quem é artista.

resposta

(b) Quem é artista gosta de quem é artista.

resposta

(c) Quem é artista gosta de alguém que é artista.

resposta

(d) Quem é artista gosta de apenas um artista.

resposta

(e) Quem é artista gosta de no máximo um artista.

resposta

3. Prove, por indução, que todo inteiro maior ou igual a 5 é a soma de números primos maiores ou iguais a 3. Por exemplo, $6 = 3 + 3$, $7 = 7$, e $10 = 3 + 7$.

resposta

4. Os números de Fibonacci F_0, F_1, F_2, \dots são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n maior ou igual a 2. Prove, por indução completa, que $(\forall n \in \mathbb{N}) F_n < (13/8)^n$.

resposta

5. Seja \mathcal{R} uma relação de A para B , \mathcal{S} uma relação de B para C , e \mathcal{T} uma relação de A para C . Em cada item abaixo, escreva uma fórmula da lógica de predicados (**sem palavras, usando apenas variáveis e símbolos, com todos os quantificadores necessários**), que expresse a afirmação dada.

(a) “A relação \mathcal{R} é antissimétrica.”

resposta

(b) “A relação \mathcal{R} é transitiva.”

resposta

(c) “ $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ” (ou seja “ $\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{S}$ ”).

resposta

6. Suponha que A e B são conjuntos, e $R \subseteq A \times B$. Em cada item abaixo, escreva uma fórmula do cálculo de predicados que é verdadeira se e somente se R é.

(a) uma função de A para B .

resposta

(b) uma função injetora de A para B .

resposta

(c) uma permutação de A .

resposta

7. Seja \mathbb{P} o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja \mathcal{R} a relação sobre \mathbb{P} tal que

$$(\forall a, b \in \mathbb{P}) a \mathcal{R} b \leftrightarrow ((\forall k \in \mathbb{N}) 2^k | a \leftrightarrow 2^k | b)$$

Por exemplo $12 \mathcal{R} 20$, $48 \mathcal{R} 16$ e $7 \mathcal{R} 15$, mas $10 \not\mathcal{R} 12$ e $9 \not\mathcal{R} 18$.

A relação \mathcal{R} é de equivalência?

Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de \mathcal{R} . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

resposta

8. Seja $A = 1..15$, e \mathcal{R} a relação sobre A tal que $x \mathcal{R} y$ se e somente se x é par e y é ímpar, ou ambos são pares e $x \mid y$, ou ambos são ímpares e $y \mid x$. Suponha provado que \mathcal{R} é uma relação de ordem sobre A .

(a) A relação \mathcal{R} é uma relação de ordem total? Justifique.

resposta

(b) Desenhe o diagrama de Hasse de \mathcal{R} .

resposta

(c) Determine os elementos mínimos, minimais, máximos, e maximais de \mathcal{R} .

resposta

9. Dizemos que o tamanho de uma imagem é (m, n) se ela tem m linhas, cada uma com n pixels. Seja A uma imagem de tamanho (m, n) , e sejam p, q dois inteiros positivos dados.

(a) Mostre como obter o tamanho (r, s) da maior imagem que cabe em A , tal que $r/s = p/q$. Por exemplo se $(m, n) = (22, 15)$, $p = 3$, e $q = 4$, então $(r, s) = (9, 12)$.

resposta

(b) Supondo determinados r, s do item (a), calcule o número k de sub-imagens desse tamanho que cabem em A sem sobreposição. No exemplo acima, $k = 2$ pois cabem 2 sub-imagens, uma acima da outra.

resposta

Importante: As respostas podem usar apenas as operações aritméticas $+$, $-$, \times e $/$ (esta última sendo divisão **real**, ou seja $7/2 = 3.5$), as funções piso e teto, e as funções $\max(x, y)$ e $\min(x, y)$. Podem usar variáveis e atribuições, mas não podem usar comandos de repetição.

10. Seja $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Usando apenas manipulação de somatórias, sem usar indução, prove que

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_i = nH_n - n$$

Dica: mude a ordem das somatórias.

resposta