

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP
Graduação
MC358-B Fundamentos Matemáticos da Computação
2022 - Semestre 2 - Jorge Stolfi
Terceira Prova - 2022-12-07

Nome legível

RA	Assinatura
----	------------

Item														TOT
Nota														

- A prova é individual e sem consulta.
Não são permitidos computadores ou calculadoras.
Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.
Não separe as folhas deste caderno de prova.
Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.
Escreva seu nome completo, e assine a tinta.
O resto da prova pode ser feito todo a lápis.
Valem apenas as respostas nos espaços indicados.
Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.
Após distribuída a prova:
- quem sair da sala não poderá retornar.
 - depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.

1. Suponha definidos

- H : conjunto de todos os humanos,
- M : conjunto de todos os médicos ($M \subseteq H$),
- A : predicado tal que $(\forall x, y \in H) A(x, y) \leftrightarrow$ “ x é amigo de y ”.

Em cada item abaixo, escreva uma fórmula da lógica de predicados (**sem palavras, usando apenas variáveis e símbolos, com todos os quantificadores necessários**) que expresse a afirmação dada:

(a) “Tem médico que só tem um amigo, que é médico.”

resposta

(b) “Tem médico que só tem um amigo que é médico.”

resposta

2. Seja \mathbb{P} o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja \mathcal{D} a relação sobre \mathbb{P} tal que

$$(\forall a, b \in \mathbb{P}) a \mathcal{D} b \leftrightarrow ((\forall k \in \mathbb{N}) 2^k | a \leftrightarrow 2^k | b)$$

Por exemplo $12 \mathcal{D} 20$, $48 \mathcal{D} 16$ e $7 \mathcal{D} 15$, mas $10 \not\mathcal{D} 12$ e $9 \not\mathcal{D} 18$.

A relação \mathcal{D} é de equivalência?

Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de \mathcal{D} . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

resposta

3. Sejam F_0, F_1, F_2, \dots os números de Fibonacci, definidos recursivamente por $F_0 = 0, F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n .

Os primeiros 10 números são portanto 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Prove, por indução completa em n , que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$$

Por exemplo, $F_0 + F_1 + \dots + F_7 = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33 = F_9 - 1$.

resposta

4. Seja $A = 1..29$, e \mathcal{R} a relação sobre A tal que $x \mathcal{R} y$ se e somente se x é ímpar e y é par, ou ambos são ímpares e $x \mid y$, ou ambos são pares e $y \mid x$. Suponha provado que \mathcal{R} é uma relação de ordem sobre A .

(a) A relação \mathcal{R} é uma relação de ordem total? Justifique.

resposta

(b) Desenhe o diagrama de Hasse de \mathcal{R} .

resposta

(c) Determine os elementos mínimos, minimais, máximos, e maximais de \mathcal{R} .

resposta

5. Suponha que X e Y são conjuntos, e $R \subseteq X \times Y$. Em cada item abaixo, escreva uma fórmula do cálculo de predicados que é verdadeira se e somente se R é.

(a) uma função de X para Y .

resposta

(b) uma função injetora de X para Y .

resposta

(c) uma permutação de X .

resposta

6. Uma lista de m nomes $x[k]$, para $k \in 0..m - 1$, deve ser formatada como um documento onde cada página tem p colunas, cada qual com c nomes; exceto na última página, onde a primeira coluna deve ter t nomes, com $1 \leq t \leq c$, e as demais t ou $t - 1$ nomes. Escreva fórmulas, usando apenas as operações aritméticas $+$, $-$, \times e as funções piso e/ou teto, para

(a) calcular o número total de páginas do documento.

resposta

(b) calcular o índice i (começando em zero) da página onde fica o nome $x[k]$.

resposta

(c) calcular o número t .

resposta

7. Seja $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Prove que

$$\sum_{j=1}^{n-1} H_j = nH_n - n$$

Dica: mude a ordem das somatórias.

resposta