



1. Suponha definidos

- $H$ : conjunto de todos os humanos,
- $E$ : conjunto de todos os estudantes ( $E \subseteq H$ ),
- $A$ : predicado tal que  $(\forall x, y \in H) A(x, y) \leftrightarrow$  “ $x$  é amigo de  $y$ ”.

Em cada item abaixo, escreva uma fórmula da lógica de predicados (**sem palavras, usando apenas variáveis e símbolos, com todos os quantificadores necessários**) que expresse a afirmação dada:

(a) “Tem estudante que só tem um amigo que é estudante.”

*resposta*

(b) “Tem estudante que só tem um amigo, que é estudante.”

*resposta*

2. Seja  $\mathbb{P}$  o conjunto dos inteiros positivos,  $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $\mathbb{P}$  tal que

$$(\forall a, b \in \mathbb{P}) a \mathcal{R} b \leftrightarrow ((\forall k \in \mathbb{N}) 2^k | a \leftrightarrow 2^k | b)$$

Por exemplo  $12 \mathcal{R} 20$ ,  $48 \mathcal{R} 16$  e  $7 \mathcal{R} 15$ , mas  $10 \not\mathcal{R} 12$  e  $9 \not\mathcal{R} 18$ .

A relação  $\mathcal{R}$  é de equivalência?

Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de  $\mathcal{R}$ . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

*resposta*

3. Sejam  $F_0, F_1, F_2, \dots$  os números de Fibonacci, definidos recursivamente por  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , e  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para todo número natural  $n$ .

Os primeiros 10 números são portanto 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Prove, por indução completa em  $n$ , que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

Por exemplo,  $F_0 + F_1 + \dots + F_7 = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33 = F_9 - 1$ .

*resposta*

4. Seja  $A = 1..29$ , e  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $A$  tal que  $x \mathcal{R} y$  se e somente se  $x$  é par e  $y$  é ímpar, ou ambos são pares e  $x \mid y$ , ou ambos são ímpares e  $y \mid x$ . Suponha provado que  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem sobre  $A$ .

(a) A relação  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem total? Justifique.

*resposta*

(b) Desenhe o diagrama de Hasse de  $\mathcal{R}$ .

*resposta*

(c) Determine os elementos mínimos, minimais, máximos, e maximais de  $\mathcal{R}$ .

*resposta*

5. Suponha que  $A$  e  $B$  são conjuntos, e  $R \subseteq A \times B$ . Em cada item abaixo, escreva uma fórmula do cálculo de predicados que é verdadeira se e somente se  $R$  é.

(a) uma função de  $A$  para  $B$ .

*resposta*

(b) uma função injetora de  $A$  para  $B$ .

*resposta*

(c) uma permutação de  $A$ .

*resposta*

6. Uma lista de  $n$  nomes  $x[k]$ , para  $k \in 0..n-1$ , deve ser formatada como um documento onde cada página tem  $c$  colunas, cada qual com  $p$  nomes; exceto na última página, onde a primeira coluna deve ter  $t$  nomes, com  $1 \leq t \leq p$ , e as demais  $t$  ou  $t-1$  nomes. Escreva fórmulas, usando apenas as operações aritméticas  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  e as funções piso e/ou teto, para

(a) calcular o número total de páginas do documento.

*resposta*

(b) calcular o índice  $i$  (começando em zero) da página onde fica o nome  $x[k]$ .

*resposta*

(c) calcular o número  $t$ .

*resposta*

7. Seja  $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ . Prove que

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_i = nH_n - n$$

Dica: mude a ordem das somatórias.

*resposta*