

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP  
Graduação  
MC358-A Fundamentos Matemáticos da Computação  
2022 - Semestre 1 - Jorge Stolfi  
Exame Final - 2022-07-26

Nome
------

RA	Assinatura
----	------------

Item														TOT
Nota														

- A prova é individual e sem consulta.**  
**Não são permitidos computadores ou calculadoras.**  
**Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.**  
**Não separe as folhas deste caderno de prova.**  
**Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.**  
**Escreva seu nome completo, e assine a tinta.**  
**Valem apenas as respostas nos espaços indicados.**  
**Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.**  
**Após distribuída a prova:**  
**\* quem sair da sala não poderá retornar.**  
**\* depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.**

1. Suponha definidos

- $H$  conjunto de todos os humanos,
- $S$  conjunto de todos os estudantes ( $S \subseteq H$ ),
- $F$  conjunto de todos os jogadores de futebol ( $F \subseteq H$ ),
- $P$  predicado tal que  $P(x) \leftrightarrow$  “ $x$  é perfeito”,
- $C$  predicado tal que  $C(x, y) \leftrightarrow$  “ $x$  é cunhado de  $y$ ”, e
- $A$  predicado tal que  $A(x, y) \leftrightarrow$  “ $x$  gosta de  $y$ ”.

Escreva as afirmações abaixo **usando notação simbólica apenas**. Para cada frase entre colchetes ‘[...]’, defina primeiro um predicado auxiliar cujo significado é essa frase, **usando notação simbólica apenas**.

(a) Tem estudante que não joga futebol.

*resposta*

(b) Cada jogador de futebol gosta de algum estudante.

*resposta*

(c) Tem jogador de futebol com um cunhado que [não gosta de nenhum estudante].

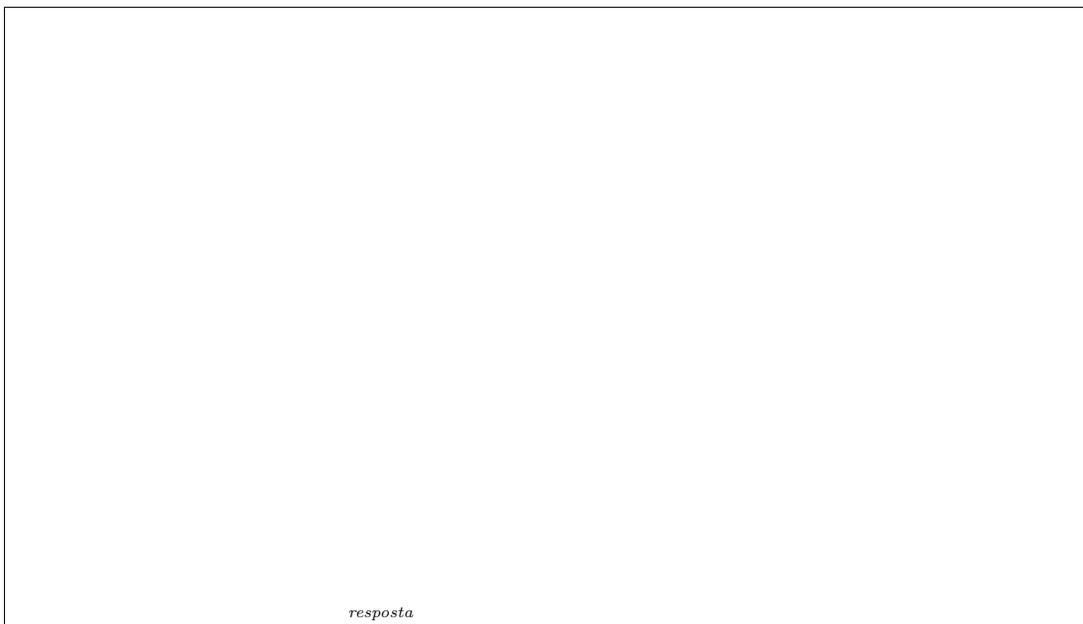
*resposta*

(d) Quem gosta de quem [só gosta de jogador de futebol] é jogador de futebol.

*resposta*

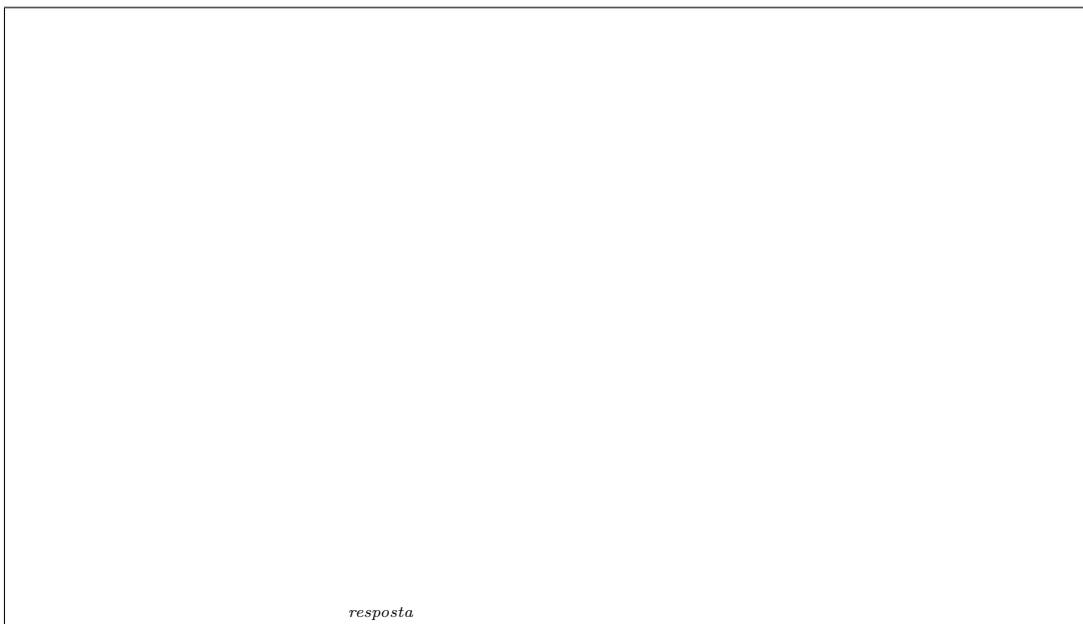
2. Seja  $\mathbf{i}$  a unidade imaginária dos números complexos, tal que  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

(a) Prove que todo número complexo  $z = z_1 + z_2\mathbf{i}$  diferente de zero tem um *inverso* (*multiplicativo*), um número complexo  $w$  tal que  $zw = 1$ .



*resposta*

(b) Prove que esse inverso é único.



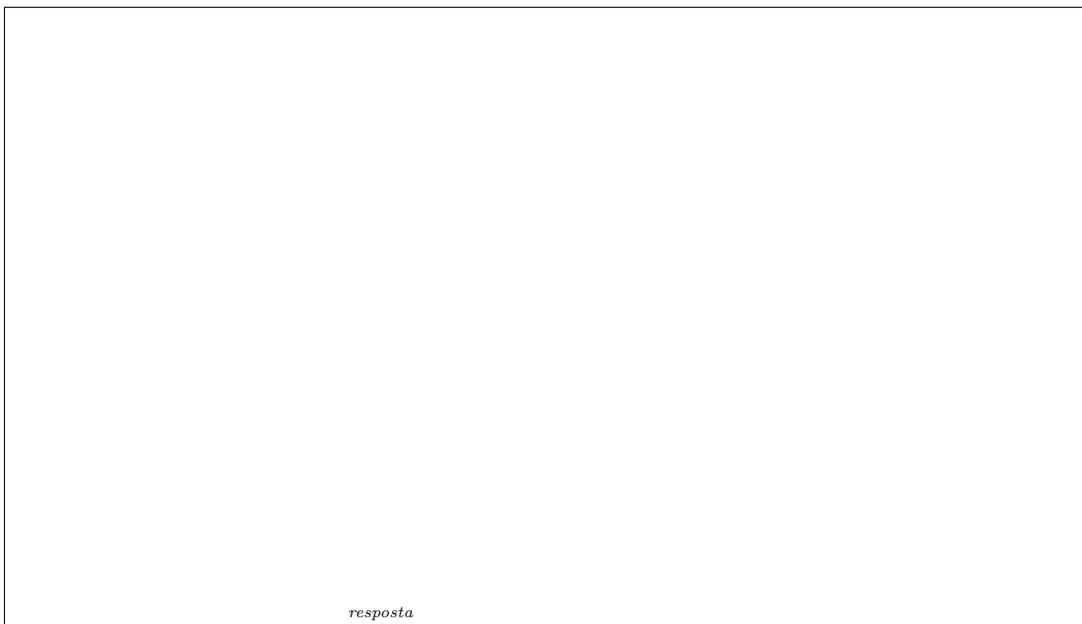
*resposta*

3. Um *número primo* é um inteiro  $n$  maior ou igual a 2 cujos únicos divisores positivos são 1 e  $n$ . Prove, por indução, que todo inteiro maior ou igual a 2 é um produto de números primos. Por exemplo,  $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ .

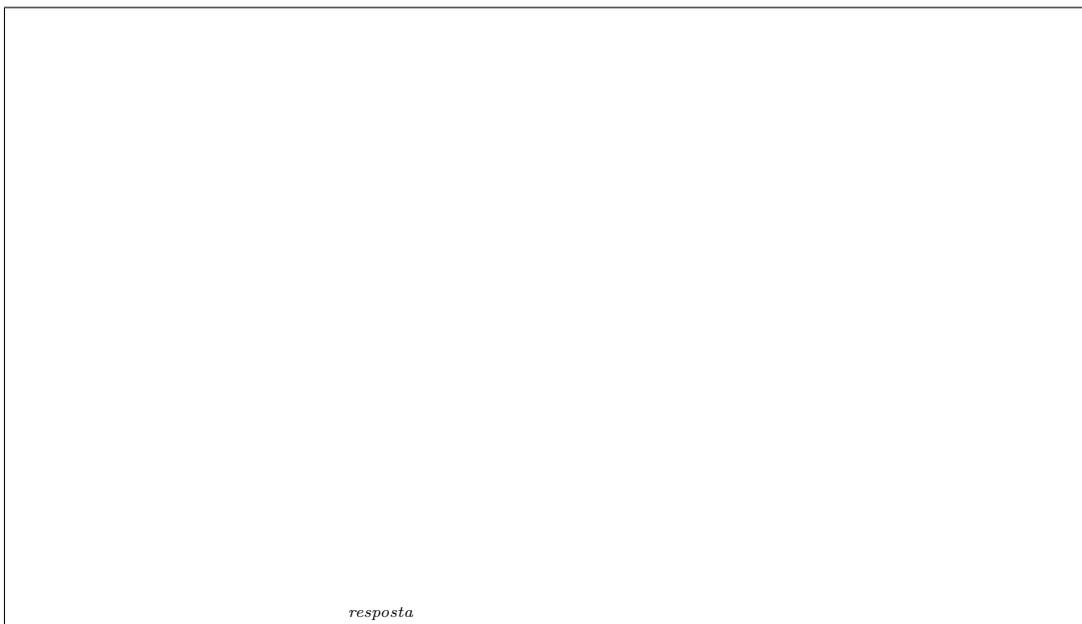
*resposta*

4. Seja  $A$  o conjunto dos inteiros de 1 a 16 inclusive. e seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $A$  tal que  $a\mathcal{R}b$  se e somente se  $a$  é um múltiplo de  $b$ . Assim, por exemplo,  $12\mathcal{R}6$ , mas  $12\not\mathcal{R}9$ .

(a) Desenhe o diagrama de Hasse de  $\mathcal{R}$ .



(b) Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais de  $A$  sob  $\mathcal{R}$ ?



5. Seja  $\mathbb{P}$  o conjunto  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , os inteiros positivos. Seja  $\mathcal{P}$  a relação sobre  $\mathbb{P}$  tal que, para todo  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{P}$ ,  $a\mathcal{P}b$  se e somente se  $a$  é divisível por 3 e  $b = a/3$ . Por exemplo  $12\mathcal{P}4$  e  $15\mathcal{P}5$ , mas  $12\not\mathcal{P}2$  e  $16\not\mathcal{P}5$ .

(a) Descreva o fecho transitivo e simétrico  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}$ , e mostre dois elementos  $x, y$  tais que  $x < y$  e  $x\mathcal{Q}y$ , mas  $\neg(x\mathcal{P}y)$  e  $\neg(x\mathcal{P}^2y)$ .

*resposta*

(b) A relação  $\mathcal{Q}$  é de equivalência? Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de  $\mathcal{Q}$ . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

*resposta*