

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP  
Graduação  
MC358-A Fundamentos Matemáticos da Computação  
2022 - Semestre 1 - Jorge Stolfi  
Exame Final - 2022-07-26

Nome
------

RA	Assinatura
----	------------

Item														TOT
Nota														

- A prova é individual e sem consulta.**
- Não são permitidos computadores ou calculadoras.**
- Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.**
- Não separe as folhas deste caderno de prova.**
- Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.**
- Escreva seu nome completo, e assine a tinta.**
- Valem apenas as respostas nos espaços indicados.**
- Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.**
- Após distribuída a prova:**
  - \* quem sair da sala não poderá retornar.**
  - \* depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.**

1. Suponha definidos

- $H$  conjunto de todos os humanos,
- $E$  conjunto de todos os estudantes ( $E \subseteq H$ ),
- $J$  conjunto de todos os jogadores de futebol ( $J \subseteq H$ ),
- $P$  predicado tal que  $P(x) \leftrightarrow$  “ $x$  é perfeito”,
- $N$  predicado tal que  $N(x, y) \leftrightarrow$  “ $x$  é cunhado de  $y$ ”, e
- $A$  predicado tal que  $A(x, y) \leftrightarrow$  “ $x$  gosta de  $y$ ”.

Escreva as afirmações abaixo **usando notação simbólica apenas**. Para cada frase entre colchetes ‘[...]’, defina primeiro um predicado auxiliar cujo significado é essa frase, **usando notação simbólica apenas**.

(a) Nem todo jogador de futebol é estudante.

*resposta*

(b) Cada estudante tem um cunhado que é jogador de futebol.

*resposta*

(c) Tem gente que não gosta de quem [só tem cunhados que são jogadores de futebol].

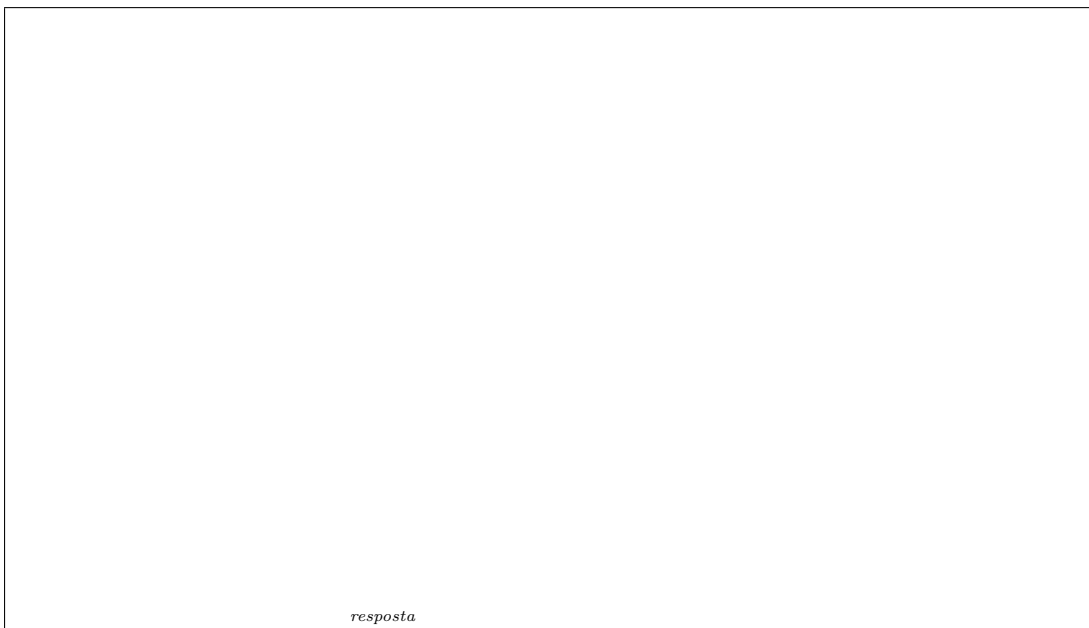
*resposta*

(d) Quem gosta de quem [gosta de todos seus cunhados] é perfeito.

*resposta*

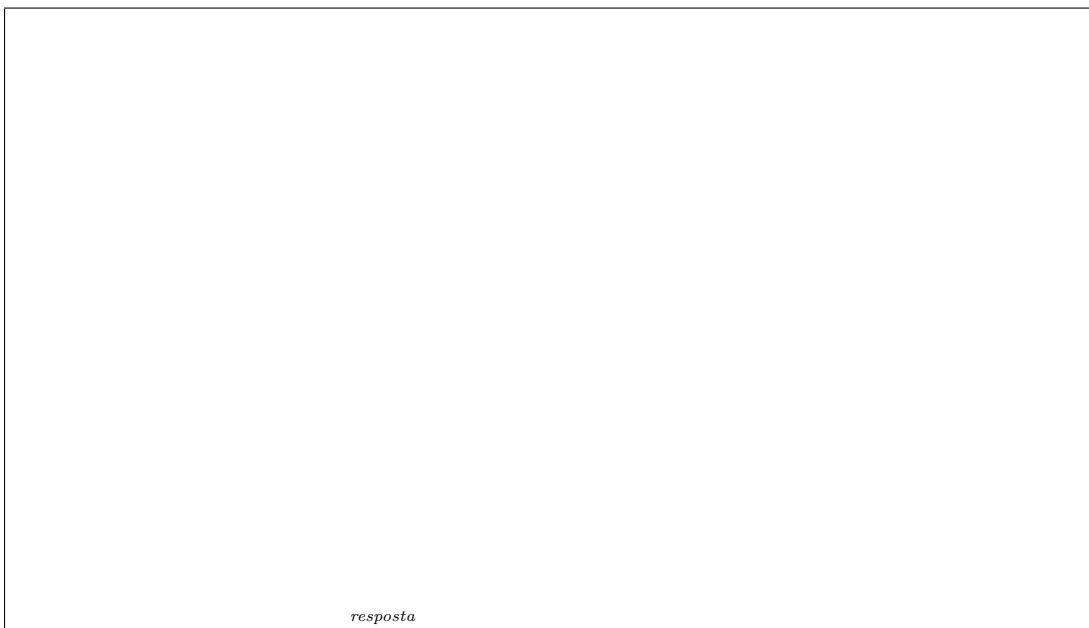
2. Seja  $\mathbf{i}$  a unidade imaginária dos números complexos, tal que  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

(a) Prove que todo número complexo  $z = a + b\mathbf{i}$  diferente de zero tem um *inverso* (*multiplicativo*), um número complexo  $w$  tal que  $zw = 1$ .



*resposta*

(b) Prove que esse inverso é único.



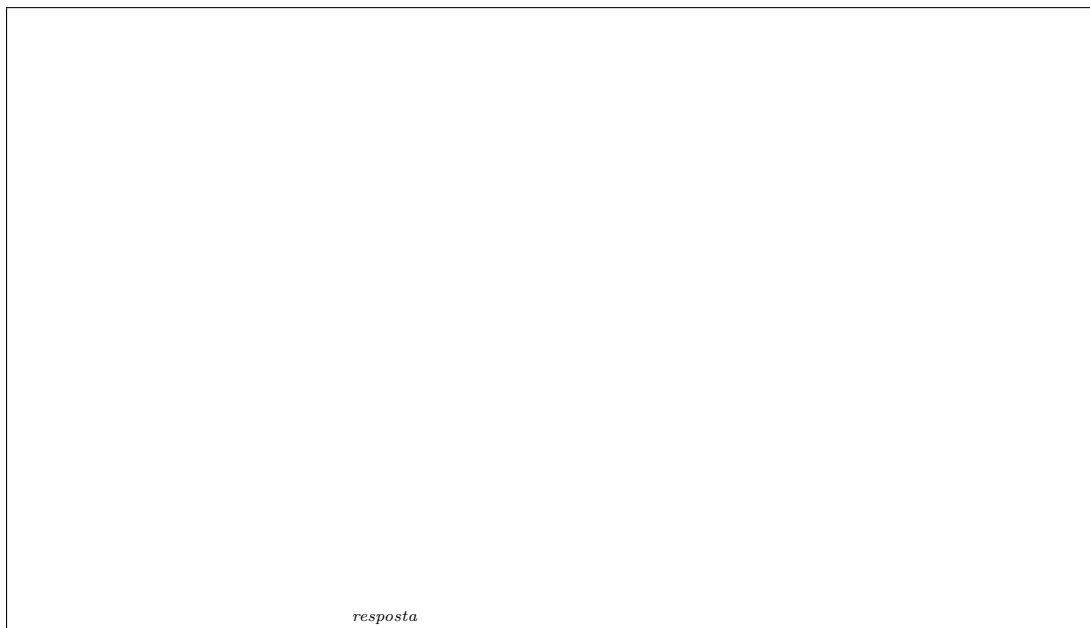
*resposta*

3. Um *número primo* é um inteiro  $n$  maior ou igual a 2 cujos únicos divisores positivos são 1 e  $n$ . Prove, por indução, que todo inteiro maior ou igual a 2 é um produto de números primos. Por exemplo,  $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ .

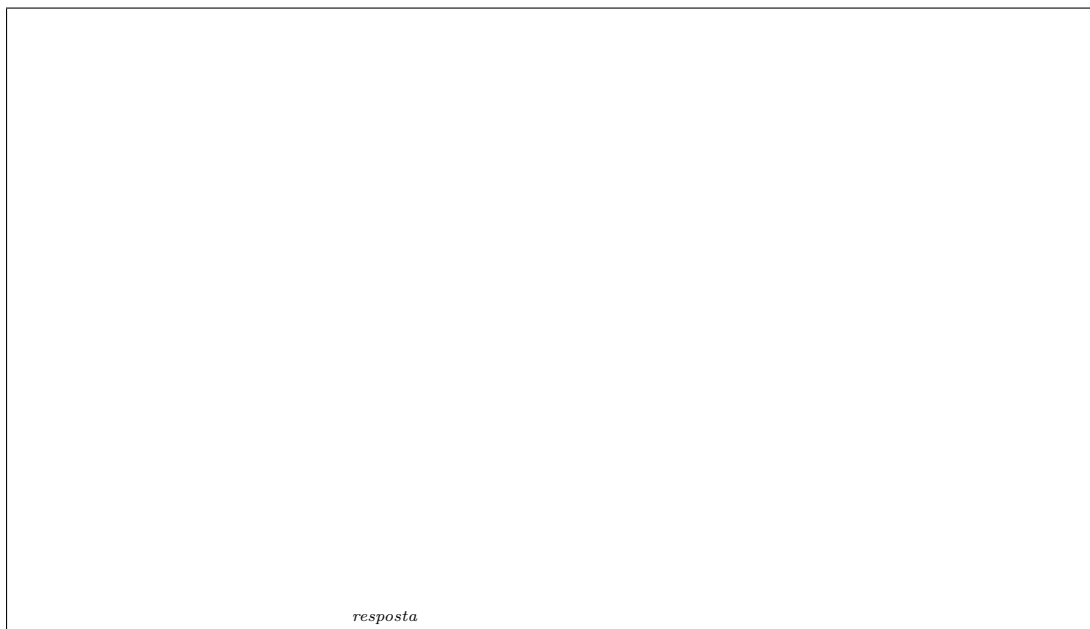
*resposta*

4. Seja  $A$  o conjunto dos inteiros de 1 a 15 inclusive. e seja  $\mathcal{S}$  a relação sobre  $A$  tal que  $a\mathcal{S}b$  se e somente se  $a$  é um divisor de  $b$ . Assim, por exemplo,  $6\mathcal{S}12$ , mas  $9\not\mathcal{S}12$ .

(a) Desenhe o diagrama de Hasse de  $\mathcal{S}$ .



(b) Quais são os elementos mínimos, maximos, minimais e maximais de  $A$  sob  $\mathcal{S}$ ?



5. Seja  $\mathbb{P}$  o conjunto  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , os inteiros positivos. Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $\mathbb{P}$  tal que, para todo  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{P}$ ,  $a\mathcal{R}b$  se e somente se  $a$  é divisível por 5 e  $b = a/5$ . Por exemplo  $35\mathcal{R}7$  e  $20\mathcal{R}4$ , mas  $35\not\mathcal{R}14$  e  $36\not\mathcal{R}7$ .

(a) Descreva o fecho transitivo e simétrico  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{R}$ , e mostre dois elementos  $x, y$  tais que  $x < y$  e  $x\mathcal{S}y$ , mas  $\neg(x\mathcal{R}y)$  e  $\neg(x\mathcal{R}^2y)$ .

*resposta*

(b) A relação  $\mathcal{S}$  é de equivalência? Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de  $\mathcal{S}$ . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

*resposta*