

1. 1943417 Seja  $D$  o conjunto dos algarismos decimais  $\{0, 1, \dots, 9\}$ , e  $D^* = \{(), 0, 1, \dots, 00, 01, \dots\}$  o conjunto de todas as sequências finitas sobre  $D$  (com índice inicial 0).

Seja  $f$  a função dos naturais para  $D^*$  tal que  $f(n)$  é a sequência dos algarismos de  $n$  em ordem crescente. Por exemplo  $f(23) = f(32) = 23$ ,  $f(161110) = 01116$ , etc. Em particular  $f(0) = ()$  (a sequência vazia) por definição.

Seja  $\mathcal{R}$  a relação de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{N}$  tal que  $x \mathcal{R} y$  se e somente se  $f(x)$  precede estritamente  $f(y)$  em ordem lexicográfica. Por exemplo  $23 \mathcal{R} 31$  pois  $f(23) = 23$  e  $f(31) = 13$ . Também  $161 \mathcal{R} 661$  e  $23 \mathcal{R} 325$  mas  $23 \not\mathcal{R} 321$ .

A relação  $\mathcal{R}$  é:

- a) uma relação de ordem?
  - b) uma relação de ordem estrita?
  - c) uma relação de ordem total?
  - d) uma relação de ordem estrita total?
  - e) uma relação de equivalência?
2. 23773 Seja  $A$  o conjunto de letras maiúsculas  $\{A, B, \dots, Z\}$  e  $A^*$  o conjunto de todas as palavras (finitas) formadas com essas letras. Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $A^*$  tal que  $x \mathcal{R} y$  se e somente se (0)  $x = y$ , ou (1) o comprimento  $|x|$  de  $x$  é menor que o de  $y$ , ou (2)  $|x| = |y|$  e  $x$  precede  $y$  em ordem lexicográfica.

A relação  $\mathcal{R}$  é

- a) uma relação de ordem?
  - b) uma relação de ordem estrita?
  - c) uma relação de ordem total?
  - d) uma relação de ordem estrita total?
  - e) uma relação de equivalência?
3. 165099 A *grade de inteiros* é um quadriculado infinito no plano  $\mathcal{R}^2$  com quadrados de lado 1, cujos cantos tem coordenadas inteiras. Escreva uma fórmula usando piso, teto, e somatória, para contar o número de quadrados dessa grade que cabem completamente dentro do círculo de um raio  $r$  dado e centro na origem.
4. 159955 Seja  $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  o conjunto de todos os inteiros positivos. Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{P}$  definida por  $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$  se e somente se  $ad = bc$ .

- a) Essa é uma relação de ordem? Em caso afirmativo, determine os elementos mínimos, máximos, minimais, e maximais.
- b) Ela é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, determine a classe de equivalência do par  $(4, 6)$  e descreva as classes de equivalência em geral.