

1. 171734 Quais das seguintes propriedades de piso e teto são verdadeiras para quaisquer x, y reais e quaisquer m, n inteiros:
 - a) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
 - b) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor$
 - c) $\lfloor mx \rfloor = m \lfloor x \rfloor$
 - d) $\lfloor x + 0.0001 \rfloor = \lfloor x \rfloor$
 - e) $\lfloor x + 0.5 \rfloor \in \{\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil\}$
 - f) $n = \lfloor n/3 \rfloor + \lceil 2n/3 \rceil$

2. 171929 Um cadastro de alunos é impresso em três colunas, com 50 nomes por coluna, em volumes de 60 páginas; exceto que a última coluna da última página está sempre em branco. Os alunos, as colunas, as páginas, e os volumes são numerados a partir de 1. Mostre como usar as funções piso e teto para determinar, dado o número do aluno,
 - a) o número c da coluna do aluno, dado que está na página 1 do volume 1;
 - b) o número c da coluna e o número p da página, dado que está no volume 1;
 - c) o número c da coluna, o número p da página, e o número v do volume.

3. 172209 Seja x um número inteiro qualquer. Prove por indução em n que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência x^n pode ser calculada com no máximo $\log_2(n + 1)$ multiplicações. (Note que $(x^k)^2 = x^{2k}$ e $x(x^k) = x^{k+1}$.)

4. 224956 Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, seja $f(n)$ o número de palavras (sequências de letras) de comprimento n que não tem duas letras consecutivas iguais. prove, por indução em n , que $f(n) = 26 \cdot 25^{n-1}$

5. 222642 Seja A o intervalo inteiro 1..5, e sejam, \mathcal{R} e \mathcal{S} duas relações de A para A , representadas pelas matrizes booleanas M e N , respectivamente, com rótulos de linhas e colunas na ordem numérica. Seja B o produto das duas matrizes com a lógica booleana, com elementos \mathbf{V} e \mathbf{F} ; e seja P o produto calculado como em álgebra linear, cujos elementos são inteiros.
 - a) Dê um exemplo em que P tem uma entrada com valor 3.
 - b) O que o valor P_{ij} significa? Qual é a conexão entre B e P ?

6. **PULADO** Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras para todo real x e todo real positivo d :
- a) $\sin(\lfloor x \rfloor \pi) = 0$
 - b) $\sin(x \bmod \pi) = \sin(x)$
 - c) $\sin(\pi(x \bmod 2)) = \sin(\pi x)$
 - e) $(x \bmod 1)^2 \leq (x \bmod 1)$
7. **222333** Seja \mathcal{R} a relação sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se o menor algarismo de x é menor que o menor algarismo de y . Por exemplo $57839 \mathcal{R} 5487$. Esta relação é
- a) Uma relação de ordem?
 - b) Uma relação de ordem estrita?
 - c) Uma relação de ordem total?
 - e) Uma relação de ordem estrita total?
8. **216414** Prove por indução que todo inteiro x no intervalo $0..3^n - 1$ pode ser escrito em base 3 com n algarismos 0, 1, ou 2.