

1. 225912 Seja \mathcal{R} a relação de equivalência sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $((a, b) \mathcal{R} (c, d))$ se, e somente se, $a + d = b + c$.
 - a) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ segundo a relação \mathcal{R} .
 - b) Descreva as classes de equivalência de \mathcal{R} .

2. 200689 Seja \mathcal{R} a relação sobre inteiros positivos definida por $x \mathcal{R} y$ se, e somente se, todo número primo que divide x divide y , e vice-versa.
 - a) Mostre que essa relação é de equivalência.
 - b) Descreva a classe de equivalência do inteiro 12.
 - c) Descreva as classes de equivalência de \mathcal{R} .

3. 201324 Suponha que uma caixa contém p bolas vermelhas e q bolas amarelas, e que o seguinte procedimento é repetido até sobrar uma única bola na caixa: “Retire duas bolas da caixa; se elas tiverem a mesma cor, coloque uma bola vermelha na caixa; se elas tiverem cores diferentes, coloque uma bola amarela na caixa. Em ambos os casos, não devolva à caixa as bolas retiradas.” Descubra qual é a cor da bola que ficará na caixa, em função de p e q . Demonstre, por indução no número de bolas $p + q$, que a sua resposta está correta.

4. 205720 Seja ϵ um número real positivo, e considere a relação \approx_ϵ sobre \mathbb{R} tal que

$$x \approx_\epsilon y \leftrightarrow |x - y| \leq \epsilon$$
 para quaisquer x e y em \mathbb{R} . Prove ou desprove que \approx_ϵ é uma relação de equivalência.

5. 216241 Considere a relação \mathcal{R} sobre os pares ordenados de inteiros positivos, $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ onde $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ se e somente se $ad < bc$. Esta é
 - a) Uma relação de ordem?
 - b) Uma relação de ordem estrita?
 - c) Uma relação de ordem total?

Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais, e maximais de $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ sob \mathcal{R} ?

6. 231300 Uma *sub-palavra* de uma palavra x é uma sequência de letras que aparecem em posições consecutivas em x , na mesma ordem. Por exemplo, 'nan' é uma sub-palavra de 'banana', mas 'bn' e 'nab' não são. Seja A o conjunto de todas as sub-palavras de 'banana', e ' \sqsubset ' a relação sobre A tal que $x \sqsubset y$ se e somente se, x é sub-palavra de y .
- a) Prove que ' \sqsubset ' é uma relação de ordem.
 - b) Construa o diagrama de Hasse de ' \sqsubset '.
7. 233993 Prove que $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n} \leq 2$.
8. 245446 Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 1$ é divisível por 6.