1. 248295 Descreva a potência genérica $\mathcal{R}^n$ para $n \geq 2$ da relação $\mathcal{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge ((y = x + 2) \vee (x = y + 2)) \,\}$.

2. 159955 Para este exercício, vamos definir uma *fórmula algébrica* como uma fórmula que usa apenas variáveis, constantes inteiras, parênteses, e as operações '+', '−', '×' (multiplicação de números reais), e '/' (divisão de números reais). Definimos também um *polinômio* como sendo uma fórmula algébrica que não usa a divisão '/'. Prove que toda fórmula algébrica $\mathcal{F}$ tem uma fórmula equivalente $\mathcal{F}'$ que é ou um polinômio, ou o quociente de dois polinômios. Dica: use indução sobre o número de operações da fórmula.

3. 160250

   a) Determine a potência $\mathcal{R}^n$ da relação $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 5)\}$ para cada n em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   b) Encontre uma relação $\mathcal{S}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}^3$, $\mathcal{S}^4$ são distintas, mas $\mathcal{S}^5 = \mathcal{S}$.

   c) Descreva a relação $\mathcal{S}^{237}$ onde $\mathcal{S}$ é a relação do item (b).

4. 257337 Seja $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o conjunto dos inteiros positivos. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique.

   a) $(\forall x \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   b) $(\forall x \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   c) $(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall x \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   d) $(\forall z \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall x \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

5. 086062 Quais dos sequintes pares de fórmulas do cálculo proposicional são logicamente equivalentes:

   a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $r \vee (\neg q \wedge p)$

   b) $p \oplus q \oplus (p \wedge q)$ e $p \vee q$

   c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

6. 139035 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Determine:

   a) O fecho reflexivo e simétrico de $\mathcal{R}$.

   b) O fecho reflexivo e transitivo de $\mathcal{R}$.

c) O fecho simétrico e transitivo de $\mathcal{R}$.

7. 140712 Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$. Prove, por indução, que $\mathcal{R}^{-3n} = \mathcal{R}^{3n}$ para todo natural n.

8. 155887 Seja A o conjunto de todas as palavras finitas e não vazias formadas com as letras $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{Z}\}$; isto é,
$A = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{AA}, \mathtt{AB}, \ldots, \mathtt{CTHULHU}, \ldots\}$
Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre A tal que $x\ \mathcal{R}\ y$ se e somente se x e y diferem apenas pela troca de duas letras consecutivas. Ou seja $\mathtt{PINHO}\ \mathcal{R}\ \mathtt{PNIHO}$ mas $\mathtt{SOPA}\ \not\mathcal{R}\ \mathtt{SAPO}$ e $\mathtt{SAPO}\ \not\mathcal{R}\ \mathtt{PAPO}$.
Descreva o fecho transitivo de $\mathcal{R}$.

9. 168838 Mostre que, se $\mathcal{R}$ é uma relação irreflexiva mas simétrica, $\mathcal{R}^{2n}$ é reflexiva sobre $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{Img}(\mathcal{R})$, para todo n natural.

10. 169786 Diz-se que uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A é uma *involução sobre* A se e somente se $\mathcal{R}^2 = \mathcal{I}_A$. Descreva a estrutura geral de tal relação.