

1. 248295 Para cada uma das relações abaixo, diga se é reflexiva sobre A e/ou irreflexiva e/ou simétrica e/ou anti-simétrica, onde $A = \{10, 20, 30, 40\}$. Justifique.
 - a) $\mathcal{R} = \{(10, 10), (10, 20), (20, 10), (20, 20), (30, 30)\}$
 - b) $\mathcal{S} = \{(10, 10), (10, 20), (20, 20), (20, 30), (20, 40), (30, 30), (30, 40), (40, 40)\}$
 - c) $\mathcal{T} = \{(10, 10), (10, 30), (20, 20), (20, 40), (30, 10), (30, 30), (40, 20), (40, 40)\}$

2. 159955 Considere a relação \mathcal{R} sobre os naturais \mathbb{N} definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x, y \in \mathbb{N} \wedge \cos(x) > \cos(y)$. Essa relação é reflexiva? Simétrica? Transitiva? Justifique.

3. 168838 Considere a relação \mathcal{R} sobre os inteiros positivos $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se existe um fator primo de x que divide y . Essa relação é reflexiva? Simétrica? Transitiva? Justifique.

4. 183955 Encontre o menor inteiro n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $1000 \cdot 2^n < 3^n$. Prove este fato por indução.

5. 222318 Mostre que, para toda fórmula \mathcal{F} do cálculo de predicados, usando qualquer conjunto de variáveis lógicas, as constantes \mathbf{V} e \mathbf{F} , operadores lógicos \wedge, \vee, \neg , e parênteses, existe uma fórmula \mathcal{F}' , logicamente equivalente, que usa as mesmas variáveis e constantes mas apenas os operadores \rightarrow e \oplus e parênteses. Use indução completa sobre o número n de operadores lógicos da fórmula \mathcal{F} .

6. 195727 Encontre uma relação \mathcal{R} sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\mathcal{R}^3 \subseteq \mathcal{R}$ mas \mathcal{R} **não** é transitiva.

7. 203648 Seja A o conjunto dos inteiros de 2 a 10, e \mathcal{R} a relação sobre A tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se x e y são primos entre si (**não** tem um fator primo comum). Costrua as matrizes booleanas que representam \mathcal{R} e \mathcal{R}^2 .

8. 174292 Seja f uma função dos reais \mathbb{R} para \mathbb{R} . Seja $\mathbb{P} = (0, +\infty)$ o conjunto dos reais positivos. Qual das seguintes fórmulas é a definição da fórmula “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ”?
 - a) $(\exists \epsilon \in \mathbb{P})(\forall \delta \in \mathbb{P})(\forall x \in \mathbb{R}) |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$
 - b) $(\forall \epsilon \in \mathbb{P})(\exists \delta \in \mathbb{P})(\exists x \in \mathbb{R}) |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$

c) $(\forall \epsilon \in \mathbb{P})(\exists \delta \in \mathbb{P})(\forall x \in \mathbb{R}) |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$

Mostre exemplos em que as definições incorretas diferem da definição correta.

9. 205087 Seja \mathcal{R} uma relação transitiva sobre um conjunto finito não vazio A tal que $\text{Dom}(\mathcal{R}) = A$. Prove, por indução sobre o número n de elementos de A , que existe um elemento x tal que $x\mathcal{R}x$. (Dica: observe que qualquer restrição de uma relação transitiva é também transitiva.)
10. 216414 Prove por indução que, para todo natural n maior ou igual a 2, o inteiro $2n + 1$ é a soma de no máximo n números primos.