MC202 - Turmas EFGHI
Lista de Exercícios 1

1. Explique como armazenar de maneira eficiente uma matriz diagonal $a[i,j]$, onde $1 \leq i,j \leq n$ e $a[i,j] = 0$ se $i \neq j$. Escreva a fórmula do endereço de um elemento genérico $a[i,j]$.

2. Explique como armazenar de maneira eficiente *duas* matrizes triangulares $a[i,j]$ e $b[i,j]$, com $1 \leq j \leq i \leq n$. **Dica:** combine as duas matrizes numa matriz retangular com forma e tamanho adequadas. Escreva fórmulas para os endereços dos elementos genéricos $a[i,j]$ e $b[i,j]$.

3. Uma *matriz tridiagonal* é uma matriz quadrada a onde $a[i,j] = 0$ se $|i-j| > 1$:

$$\begin{pmatrix}
\bullet & \bullet & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 0 & & & & \vdots \\
0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & & & \\
\vdots & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & & \\
 & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 & & & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\
\vdots & & & & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & \bullet & \bullet
\end{pmatrix}$$

   onde $\bullet$ representa um elemento possivelmente não nulo. Descreva uma representação compacta e eficiente para uma matriz tridiagonal, e escreva a fórmula do endereço do elemento genérico.

4. Uma *matriz de banda* é uma generalização de uma matriz tridiagonal, onde os elementos não nulos estão confinados a $2k+1$ diagonais centradas na diagonal principal, para algum inteiro k — ou seja, onde o elemento genérico $a[i,j]$ é nulo se $|i-j| > k$. Generalize sua resposta ao exercício 3 para representar tal matriz.

5. Suponha que matrizes esparsas são representadas na forma vista no primeiro trabalho de laboratório.

   (a) Escreva um procedimento `MV_prod` que calcula o produto $M \cdot v$, onde M é uma matriz esparsa de m linhas e n colunas, e v é um vetor (supostamente coluna) de n elementos, resultando num vetor (coluna) de m elementos.

   (b) Escreva um proceimento `VM_prod` para calcular $v \cdot M$, onde M é como acima, e v é um vetor (supostamente linha) de m elementos, resultando num vetor (linha) de n elementos.

6. Escreva um procedimento eficiente para trocar a ordem de dois elementos consecutivos x_i e x_{i+1} de uma lista $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, representada na forma de uma lista ligada simples. Os dados são apenas o endereço L do primeiro elemento da lista, e o endereço a do elemento x_{i-1} do elemento anterior aos dois qie devem ser trocados; ou **nil**, se $i = 1$. O procedimento deve retornar o endereço do primeiro elemento da lista, após a troca.

7. Resolva novamente o exercício 6, mas suponha que a lista tem um nó-cabeça. Procure simplificar ao máximo o procedimento, eliminando todos os parâmetros, variáveis e comandos supérfluos.

8. É possível armazenar eficientemente duas pilhas P e Q no mesmo vetor, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, se convencionarmos que a segunda cresce no sentido oposto ao da primeira — a partir de x_{n-1}, na direção de x_0. Escreva os respectivos procedimentos de manipulação (`empilha_P`, `empilha_Q`, `remove_P`, `remove_Q`), testando explicitamente todos os possíveis erros de uso.

9. Escreva um procedimento que, dado um inteiro n, imprime a seqüência T_n abaixo. O procedimento deve usar pilha em vez de recursão.

$$
\begin{array}{lcl}
T_1 & = & 1 \\
T_2 & = & 1 \,.\, 2 \,.\, 1 \\
T_3 & = & 1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 1 \\
\ldots & & \ldots \\
T_n & = & T_{n-1} \,.\, n \,.\, T_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2
\end{array}
$$

10. Vamos dizer que uma palavra é uma *escada* se suas letras, da esquerda para a direita, são estritamente crescentes em ordem alfabética. Assim, ACENO e XYZ são escadas, enquanto que CBA, ADDER e ZAC não são. Escreva um algoritmo `escadas`(n, p), que imprime todas as escadas possíveis formadas com n letras escolhidas dentre as primeiras p letras do alfabeto. Por exemplo, `escadas`$(3, 5)$ deve imprimir `ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE`. O algoritmo deve usar uma pilha de caracteres em vez da recursão.

11. Na representação linear de matrizes vista em classe, foi convencionado que os elementos um vetor (ou de cada linha de uma matriz) seriam armazenados em posições consecutivas, de modo que a diferença δ_1 entre os endereços de $v[i]$ e $v[i+1]$ (ou $a[i,j]$ e $a[i,j+1]$) seria sempre igual ao tamanho L de cada elemento. Foi convencionado também que as linhas de uma matriz seriam armazenadas consecutivamente, de modo que a diferença δ_2 entre os endereços de $a[i,j]$ e $a[i+1,j]$ seria sempre igual ao tamanho de uma linha — ou seja, mL, se a matriz tiver m elementos por linha.

    Com estas convenções, a representação interna de qualquer vetor v seria completamente determinada por um *descritor* $\hat{v}$ formado pelos 4 parâmetros (L, e, lo, hi), onde e é o endereço do primeiro elemento, e lo, hi são os valores mínimo e máximo do índice. Da mesma forma, a representação de uma matriz a seria determinada por um *descritor* com 6 parâmetros $\hat{a} = (L, e, lo_1, hi_1, lo_2, hi_2)$, onde e é o endereço do primeiro elemento, e lo_k, hi_k são os valores mínimo e máximo de cada índice da matriz.

    Considere agora uma representação um pouco mais geral, onde as diferenças δ_1 e δ_2 são parâmetros arbitrários da representação, independentes de L e das dimensões da matriz. O descritor de uma matriz a teria então 8 parâmetros $\hat{a} = (L, e, lo_1, hi_1, \delta_1, lo_2, hi_2, \delta_2)$.

    (a) Escreva uma fórmula para o endereço do elemento genérico $a[i,j]$, nessa representação.

    (b) Mostre como inverter a ordem dos elementos de um vetor, manipulando apenas seu descritor. Ou seja, dado descritor de um vetor $v[lo\,..\,hi]$, escreva o descritor do vetor $u[lo\,..\,hi]$ tal que $u[i] = v[hi - (i - lo)]$, para todo $i \in \{lo\,..\,hi\}$.

    (b) Dado o descritor de uma matriz $a[lo_1\,..\,hi_1, lo_2\,..\,hi_2]$, mostre como construir descritores para os seguintes vetores e matrizes: (1) a i-ésima linha de a – isto é, o vetor v tal que $v[j] = a[i,j]$; (2) a j-ésima coluna de a; (3) a k-ésima diagonal de a, isto é, o vetor v tal que $v[i] = a[i, i+k]$; (4) a transposta da matriz a; (5) a matriz a menos a primeira linha e a primeira coluna.