Instituto de Computação
Unicamp

MO 416 - Introdução à Inteligência Artificial
1º Semestre de 2010

Lista 1 - Conceitos básicos e pré-requisitos de matemática

Entrega: Terça, 16/03/2010 (em aula)

O objetivo desta lista de exercícios é se familiarizar e relembrar de algumas das ferramentas matemáticas básicas que utilizaremos durante o curso.

1. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ (vetores no espaço), onde $\cdot$ representa o produto interno e $\times$ o produto vetorial. Verifique que as seguintes relações são verdadeiras:

   (a) $a \times b = -b \times a$

   (b) $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

   (c) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ uma matriz 3×3 ($a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$). Mostre que $det\,(A) = a_3 \cdot (a_1 \times a_2)$.

3. Calcule os autovalores e autovetores das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Construa uma matriz com autovetores $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, e com autovalores 1 e 2.

5. Resolva os sistemas

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Explique o que é a SVD (Single Value Decomposition), relacionê-a com o conceito de autovalores e autovetores e utilize um programa matemático (como o GNU-octave) para calular a SVD de

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Como se utiliza a SVD para a solução de sistemas lineares homogêneos?

8. Como se utiliza a SVD para a solução de sistemas lineares não-homogêneos super-determinados?

9. O que é evento, espaço amostral e medida de probabilidade?

10. O que é uma variável aleatória?

11. O que é independência de variáveis aleatórias?

12. O que é uma função de distribuição de probabilidade (f.d.p.)?

13. Seja X uma variável aleatória contínua, com f.d.p. dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= ax, \qquad 0 \le x \le 1, \\ &= a, \qquad 1 \le x \le 2, \\ &= -ax+3a, \qquad 2 \le x \le 3. \\ &= 0 \qquad \text{para demais valores}. \end{aligned}$$

    (a) Determine a constante a.
    (b) Determine a função de distribuição acumulada F e esboce seu gráfico.
    (c) Se X_1, X_2 e X_3 forem três observações independentes de X, qual será a probabilidade de, exatamente, um desses três números ser maior do que 1,5?

14. Suponha que X seja uniformemente distribuida sobre $[-\alpha, +\alpha]$, onde $\alpha > 0$. Quando possível, determine of valor de α de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

    (a) $P(X > 1) = \frac{1}{3}$.
    (b) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$.
    (c) $P(X < \frac{1}{2}) = 0,7$.
    (d) $P(X < \frac{1}{2}) = 0,3$.
    (e) $P(X < 1) = P(X > 1)$.

15. Suponha que a f.d.p. conjunta da variável aleatória bidimensional (X,Y) seja dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + \frac{xy}{3}, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 2 \\ &= 0 \qquad \text{para quaisquer outros valores de } x,y. \end{aligned}$$

    Calcule o seguinte:

    (a) $P(X > \frac{1}{2})$.
    (b) $P(Y < X)$.
    (c) $P(Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.

16. Para que serve e como se representa a f.d.p. de uma Gaussiana Multidimensional?