MO619/MC948 — Geometria Computacional
Prof. Pedro J. de Rezende
$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

Tópico: Intersecção Geométrica

Problemas estudados dentro do tópico de Intersecção Geométrica

- Intersecção de dois polígonos convexos
- Intersecção de segmentos arbitrários em $\mathbb{R}^2$
- Intersecção de meios-planos em $\mathbb{R}^2$
- Intersecção de n polígonos convexos
- Aplicação a Problemas de Programação Linear em $\mathbb{R}^2$
- Aplicação a Problemas de Programação Linear em $\mathbb{R}^d$?

Revisão

Responda e dê uma justificativa breve:

1. Dados n segmentos no plano, qual a complexidade de pior caso do melhor algoritmo que você conhece para determinar se existe intersecção entre algum par destes segmentos?
2. Dados n segmentos no plano, qual a complexidade de pior caso do melhor algoritmo que você conhece para determinar todas as intersecções entre pares destes segmentos?
3. Qual é a melhor quota inferior que você conhece para o problema da detecção de existência ou não de intersecção entre os segmentos de um conjunto de n segmentos dados no plano?
4. Dado um polígono de n lados no plano, qual a complexidade de pior caso do melhor algoritmo que você conhece para determinar se este é simples?
5. Qual é a melhor quota inferior que você conhece para o problema da determinação da intersecção de dois polígonos estrelados, cada um dos quais com n lados?

Enunciado do Problema Inter-MP

- O problema da *intersecção de meios-planos* (Inter-MP) consiste em, dados n meios-planos, H_1, H_2, …, H_n, queremos construir sua intersecção:

$$H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n.$$

Algoritmo para o Problema Inter-MP

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

6. Intersecção é associativa?

7. Qual a forma geométrica da intersecção de meios-planos?

8. Descreva um algoritmo de divisão e conquista para resolver o problema Inter-MP.

9. Seu algoritmo tem complexidade $O(n \log n)$? Caso afirmativo, vá para a próxima questão. Caso contrário, re-comece no item anterior.

Pode-se resolver Inter-MP mais eficientemente?

- Sejam x_1, x_2, …, x_n n valores reais distintos que queremos ordenar.

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

10. Desenhe caprichadamente uma parábola $y = x^2$.

11. Mostre que, para cada x_i, a reta: $y = 2x_ix - x_i^2$ é tangente à parábola do item anterior no ponto: (x_i, x_i^2).

12. Considere a intersecção dos meios-planos determinados por essas retas e contendo o ponto $(0, 0)$. Aplicando-se *qualquer* algoritmo que determina esta intersecção obtém-se que figura geométrica?

13. É possível se obter a seqüência ordenada dos x_i's dados a partir da intersecção assim obtida?

14. O que acabamos de provar nesta questão?

Intersecção de vários k-polígonos convexos.

Realize o seguinte:

15. Aplique seus conhecimentos de intersecção geométrica sobre o Inter-MP para mostrar que é possível resolver o problema de se determinar a interseção de n k-polígonos convexos dados em tempo $O(nk\log(nk))$.

Revisão

16. Qual a complexidade de pior caso do melhor algoritmo que você conhece para determinar a intersecção de dois polígonos convexos de n e m vértices, respectivamente?

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

17. Qual a forma geométrica da intersecção de n k-polígonos convexos? Quantos lados tem a forma geométrica resultante?

18. Mostre que a relação de recorrência:

$$T(n,k) = 2T(n/2,k) + ckn$$

tem solução $O(nk\log n)$.

19. Descreva um algoritmo de divisão e conquista para resolver o problema de se determinar a interseção de n k-polígonos convexos dados em tempo $O(nk\log n)$ (o qual pode ser mais eficiente que o seu algoritmo da resposta à pergunta 15. que tinha complexidade $O(nk\log(nk))$).

Aplicação do Inter-MP ao Problema PL-2V

- O problema de *Programação Linear em duas variáveis* (PL-2V) pode ser descrito como:

$$\text{minimize } ax + by$$

sujeito a:

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Note que a região do plano dos pontos que satisfazem as inequações acima é uma intersecção de meios-planos, e é portanto um polígono generalizado, i.e., possivelmente aberto e ilimitado.

Por outro lado, a função objetivo dá origem a uma família de retas paralelas $ax + by + \lambda = 0$ onde λ é um parâmetro real (veja Figura 1).

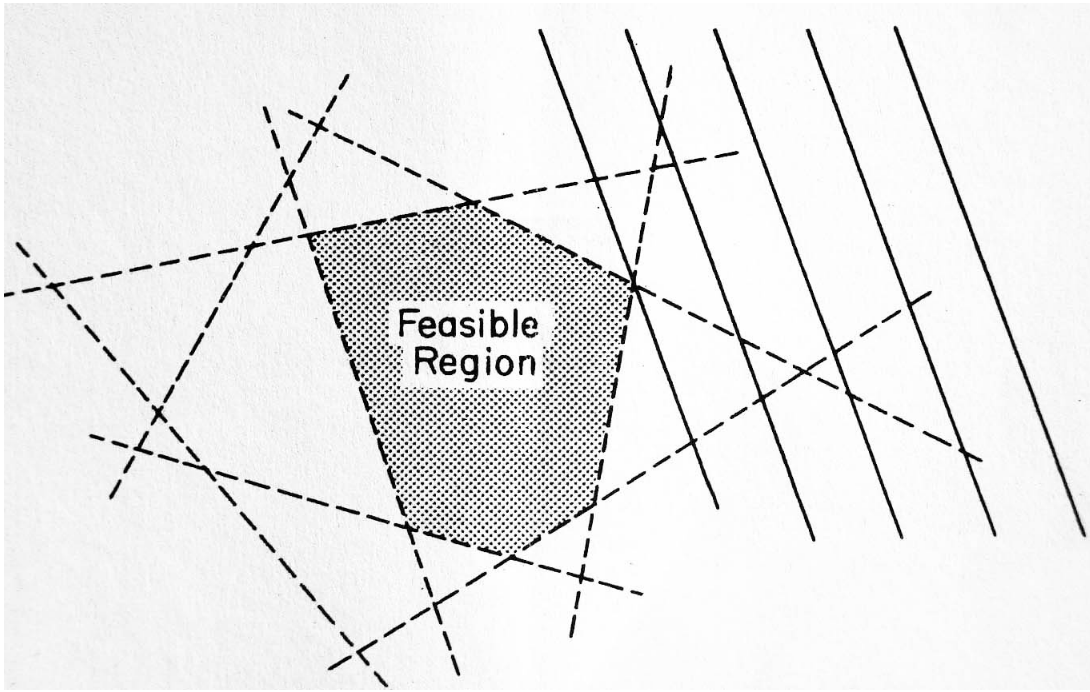

Figura 1: Região de viabilidade.

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

20. Em que pontos da região de viabilidade (Feasible Region) a função objetivo poderia ser minimizada?

21. Apresente uma redução em tempo linear **do** problema PL-2V **para o** problema InterMP.

22. A partir da redução apresentada no item anterior, qual a melhor quota **superior** para o problema PL-2V?

Aplicação a uma versão iterada do Problema PL-2V

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

23. Dado um polígono convexo P de n lados e uma direção θ, mostre que se pode determinar retas de suporte de P paralelas à direção θ em tempo $O(\log n)$.

24. Resolva o seguinte problema:

    Dadas as restrições
$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

queremos pré-processá-las de modo a podermos responder rapidamente a múltiplas instâncias do problema PL-2V, onde este conjunto de restrições permanece fixo, e muda-se apenas a função objetivo.

25. Analise a complexidade de seu método de solução do item anterior explicitando a complexidade de tempo de pré-processamento, de tempo de solução para cada uma das funções objetivos (dadas na forma de consulta) e de espaço de armazenagem.

Generalização para maiores dimensões?

Ao se fazer a intersecção de n meios-espaços de dimensão d em $\mathbb{R}^d$, obtém-se um politopo.

O número máximo de vértices de um politopo em $\mathbb{R}^d$ obtido pela intersecção de n meios-espaços cresce com a dimensão d do espaço.

Responda (ou realize) e dê uma justificativa breve:

26. Investigue (se você ainda não souber a resposta) se o crescimento do número de vértices é função polinomial ou exponencial de d.

27. Argumente que a solução do problema de programação linear em dimensão d através da construção explícita do politopo resultante das restrições não é uma abordagem eficiente.