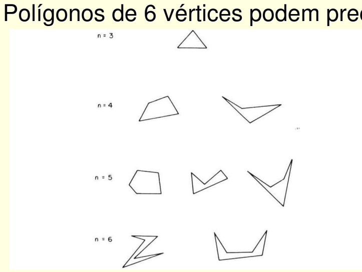
Problema da Galeria de Arte

MO619

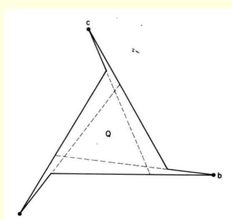
Pedro J. de Rezende

Casos simples

- Polígonos de até 5 vértices podem ser cobertos com 1 guarda.
- Polígonos de 6 vértices podem precisar de 2.

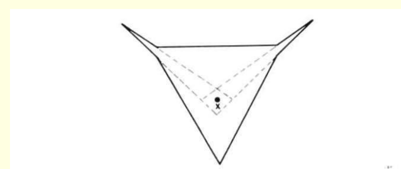


Paredes visíveis, interior não



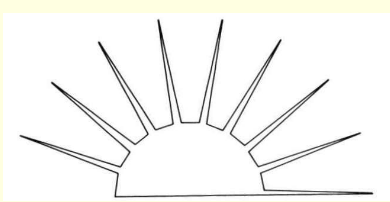
Guarda no interior é mais poderoso

- Um guarda no interior é suficiente
- Dois vértice-guardas são necessários



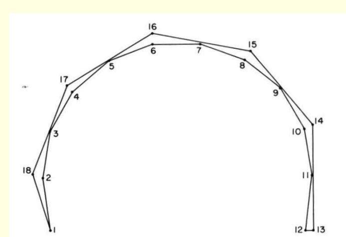
Número de guardas necessários

- Exemplo num polígono estrelado: [n/3] guardas são necessários



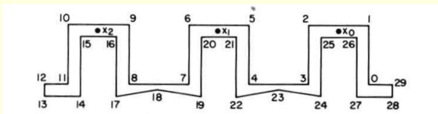
Número de guardas necessários

- Exemplo num polígono espiralado: [n/3] guardas são necessários



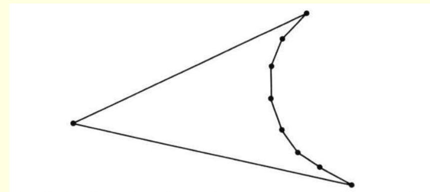
Um guarda a cada três vértices?

- Um guarda a cada três vértices ($v_{i \bmod 3}$) não cobre o ponto x_i.



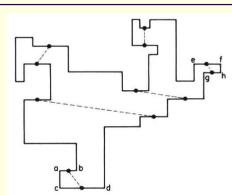
Guardas em vértices reflexos

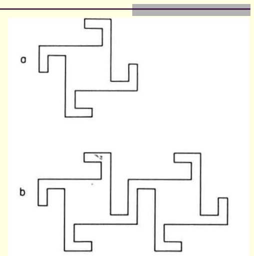
- Será que guardas em vértices reflexos bastam?

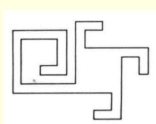


- Um n-polígono pode ter n-3 vértices reflexos

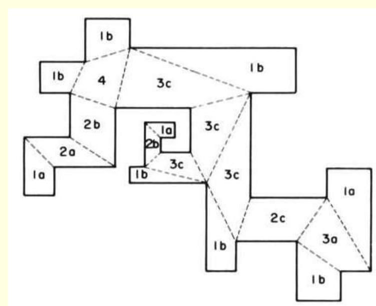
Polígonos ortogonais (orto-gons)



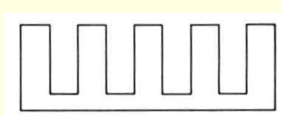




Quadrilateralização de orto-gon

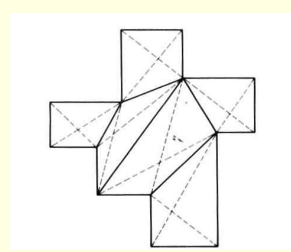


Orto-gons: 4-cores são necessárias

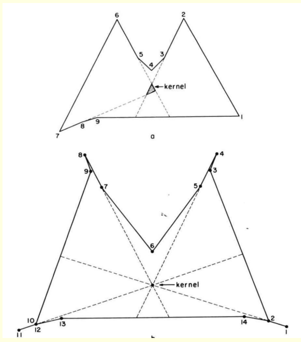


Orto-gons: 4-cores são suficientes

- Acrescentamos todas as diagonais dos quadriláteros

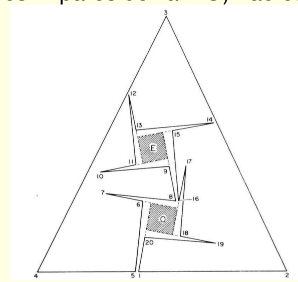


Casos críticos



Visibilidade Exterior

- Guardas em vértices pares deixam *E* (em vértices ímpares deixam *O*) não coberto.

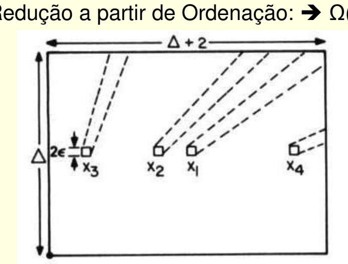


Algoritmo para polígono de visibilidade

- Polígono simples de *n* vértices (sem buraco):
  - El Gindy & Avis (1980) O(*n*) – 3 pilhas
  - Lee (1983): O(*n*) – 1 pilha
  - Joe & Simpson (1985): O(*n*) – simplificação do algoritmo de Lee
- Polígono simples de *n* vértices com buraco?

Algoritmo para polígono de visibilidade

- Polígono simples de *n* vértices com buracos: podemos construir o pol. de visib. em O(*n*)?
  - Redução a partir de Ordenação: ➔ $\Omega(n \log n)$



Problema da minimização

- Formulação:
  - Dado um polígono simples *P* de *n* lados determinar o menor número de guardas que vigiam *P* (interior e arestas).
- Variações
  - **Guardas em vértices** (*v*-ART)
  - Guardas em *P* (interior, vértices ou arestas) (*p*-ART)
  - Guardas em arestas (móveis)
  - Guardas em diagonais (móveis)
  - Problemas de iluminação: holofotes (180º, ângulo α, etc.)

Problema da minimização

- Teorema (Lee & Lin 1984):

  O problema (v-ART) da minimização do # de guardas-vértices que vigiam uma galeria de arte cujo bordo é um polígono simples é NP-difícil.
- Redução a partir de 3-SAT

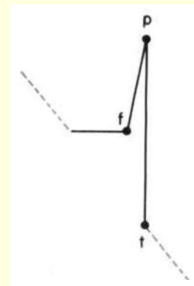
Problema da minimização

- Desafios:

  Construir polígono *P* que representa uma instância *S* de 3-SAT:
  - Representação única de cada <u>variável</u>
  - Coerência entre valores de <u>literais</u>
  - Existência de solução para *S* <u>se e só se</u> P pode ser minimamente coberto.
    - Veremos que se tratará de $3m+n+1$ guardas, onde m=#cláusulas, n=#variáveis.

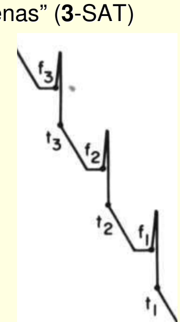
Um Literal

- Uma "antena"



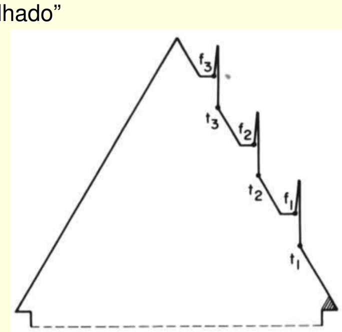
Três Literais

- Três "antenas" (**3**-SAT)



Uma Cláusula

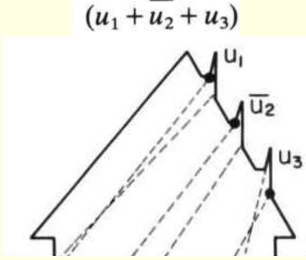
- "Telhado"



Uma Cláusula

- Exemplo

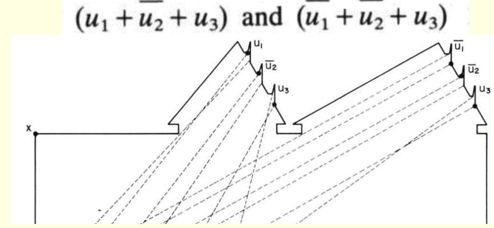
$$(u_1 + \overline{u_2} + u_3)$$



Polígono parcial

- Instância de duas cláusulas

$$(u_1 + \overline{u_2} + u_3) \text{ and } (\overline{u_1} + \overline{u_2} + u_3)$$

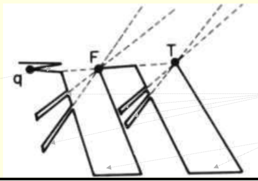


Uma Variável

- Falta garantirmos que:
  - A cada variável *u* seja atribuído um valor T/F
  - A cada variável *u* seja atribuído só um valor T/F

  Dois "fossos", 2*k* "espinhos" e um "bico" onde *k* é o # de ocorrências de *u* na instância dada

Bico

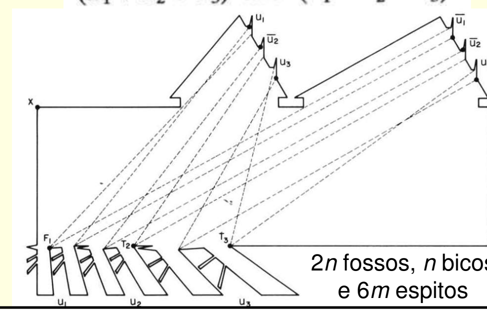


Espetos

Fossos

Polígono Completo (n=3, m=2)

$$(u_1 + \overline{u_2} + u_3) \text{ and } (\overline{u_1} + \overline{u_2} + u_3)$$



m telhados

2*n* fossos, *n* bicos e 6*m* espitos

v-ART é NP-difícil (Lee & Lin 1984)

- **Lema**: Uma instância do 3-SAT é satisfatível se e somente se o polígono construído pode ser coberto com K=3m + n + 1 guardas-vértices.
- **Corolário**: Dados *K* inteiro e um polígono simples *P*, decidir se *P* pode ser coberto com *K* guardas-vértices é NP-difícil.
- **Teorema**: O problema da minimização do # de guardas-vértices que vigiam uma galeria de arte cujo bordo é um polígono simples é NP-difícil.

p-ART é NP-difícil (Aggarwal 1984)

- **Corolário**: O problema da minimização do # de guardas-pontos que vigiam uma galeria de arte cujo bordo é um polígono simples é NP-difícil.

Bibliografia

- J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
  - (O trecho correspondente está disponível na reprografia do IA – Artes Cênicas)
- J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1993.
  - (O trecho correspondente está disponível na reprografia do IA – Artes Cênicas)