Estas páginas contêm as definições das classes *o*, *O*, ω, Ω e Θ em termos de limites inferiores e superiores, e foram extraídas do livro:

Fundamentos de Geometria Computacional

Pedro J. de Rezende
Jorge Stolfi

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Estadual de Campinas
Campinas SP, Brasil
{rezende|stolfi}@dcc.unicamp.br

IX Escola de Computação
Julho de 1994

1.3 Análise assintótica

Tanto a comparação das eficiência de algoritmos para um dado problema quanto a comparação das complexidades de diferentes problemas (como discutiremos na seção 1.4) requerem que possamos comparar o

[1]Estaremos interessados em eficiência de soluções em *pior caso* a menos que seja explicitamente indicado o contrário.

crescimento assintótico de funções. Para isso, convém desenvolvermos uma notação concisa.

Sejam f, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ duas funções positivas. Se o limite do quociente f/g quando n tende a infinito é definido, podemos classificar f e g com respeito a seus crescimentos assintóticos baseando-nos no valor deste limite (zero, positivo finito ou infinito). Há porém situações em que este limite não é definido nas quais ainda é necessário fazer esta classificação.

Assim, definiremos classes de funções baseados nas noções mais fracas de limites inferior ($\underline{\lim}$) e superior ($\overline{\lim}$). Se f e g são funções positivas, então os limites parciais $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(n)/g(n)$ e $\overline{\lim}_{n\to\infty} f(n)/g(n)$ sào sempre definidos (números reais ou infinitos).

As classes o, O, Θ, Ω e ω

Dizemos então que:

$$f \in o(g) \text{ se } \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \in O(g) \text{ se } \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$f \in \Theta(g) \text{ se } \quad 0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ e } \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$f \in \Omega(g) \text{ se } \quad 0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$f \in \omega(g) \text{ se } \quad \infty = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$f \text{ e } g \text{ são incomparáveis se } \quad 0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ e } \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Como o limite inferior é sempre menor que ou igual ao limite superior, a definição acima cobre todos os casos e portanto, a união das classes $o(g)$, $O(g)$, $\Theta(g)$, $\Omega(g)$ e $\omega(g)$ contém todas as funções comparáveis com a função g.

O leitor pode se sentir ainda mais confortável com esta notação pensando inicialmente em termos de funções cujo limite do quociente é definido, já que nestes casos temos:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}.$$

Ex. 1.3: É fácil ver que existem intersecções entre algumas destas classes como ilustra a figura 1.1. Mostre que:

(a) $o(g) \subset O(g)$

(b) $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$

(c) $\Omega(g) \supset \omega(g)$

(d) $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$

(e) $o(g) \cap \Theta(g) = \emptyset$

(f) $\Theta(g) \cap \omega(g) = \emptyset$.

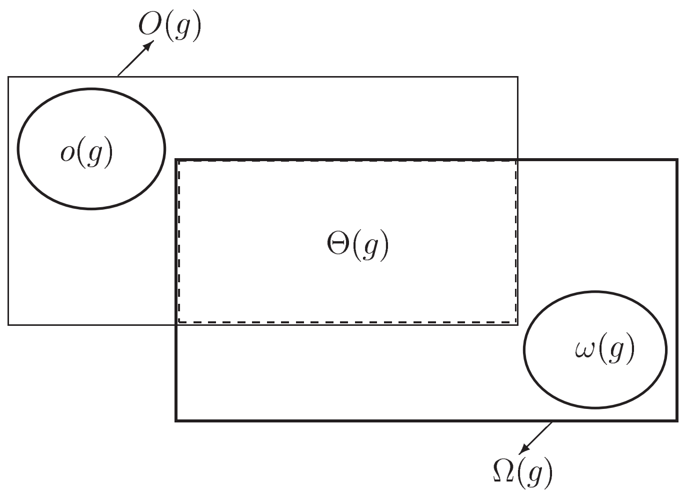

Figura 1.1: Classes de funções

A razão para se estar interessado na complexidade *assintótica* é que uma função que a expressa pode ter um comportamento, para instâncias de tamanhos limitados, que não corresponde à tendência de seu crescimento para entradas de tamanho crescente. Isto é, o comportamento do crescimento da função fica mascarado por constantes multiplicativas que não contribuem para a identificação de seu crescimento. Por exemplo, se o parâmetro n mede o tamanho da entrada de um problema P, tanto faz dizermos que P tem complexidade assintótica $n/2$, n ou $100n$. O crescimento de todas estas funções é linear em n. Se, porém, pudermos mostrar que P também tem cota inferior expressa por $n^{3/2}/100$, esta é mais significante do que qualquer das expressões lineares anteriores. Embora $n^{3/2}/100$ seja menor que $100n$ para $n < 10^8$, o comportamento assintótico de $n^{3/2}/100$ é maior que o de $100n$, isto é:

$$\frac{n^{3/2}}{100} \in \omega(100n).$$

Ex. 1.4: Mostre que:

(a) $\sqrt{n} \in O(n)$	(b) $100n \in \Theta(n)$
(c) $n \log n \in o(n^2)$	(d) $n^k \in o(2^n)\ \forall k \in \mathbb{N}$
(e) $n^{1/4} \in \Omega(\log^4 n)$	(f) $n^\alpha \in \omega(\log^k n)\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall \alpha > \nvdash$

Por outro lado, observe que:

$$\begin{array}{lcl}
f \in o(g) & \text{se e somente se} & g \in \omega(f) \\
f \in O(g) & \text{se e somente se} & g \in \Omega(f) \\
f \in \Theta(g) & \text{se e somente se} & g \in \Theta(f) \\
f \in \Omega(g) & \text{se e somente se} & g \in O(f) \\
f \in \omega(g) & \text{se e somente se} & g \in o(f)
\end{array}$$

Informalmente, referimos às funções das várias classes dizendo que:

$$\begin{array}{rl}
f \text{ cresce mais lentamente que } g & \text{se } f \in o(g) \\
f \text{ cresce no máximo tão rapidamente quanto } g & \text{se } f \in O(g) \\
f \text{ cresce tão rapidamente quanto } g & \text{se } f \in \Theta(g) \\
f \text{ cresce no mínimo tão rapidamente quanto } g & \text{se } f \in \Omega(g) \\
f \text{ cresce mais rapidamente que } g & \text{se } f \in \omega(g)
\end{array}$$

Veremos já no capítulo 3 alguns exemplos do uso dos conceitos e da terminologia aqui estabelecidos.