

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Conjuntos Dominantes em Grids

Izumi Oniki Chiquito C. N. Campos

Technical Report - IC-09-42 - Relatório Técnico

November - 2009 - Novembro

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.
O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade dos autores.

Conjuntos Dominantes em Grids *

Izumi Oniki Chiquito

C. N. Campos

Resumo

Sejam P_m e P_n dois caminhos de m e n vértices, respectivamente. Um *grid* $G_{m \times n}$ é o grafo correspondente ao produto cartesiano $P_m \times P_n$. Neste trabalho, tratamos de conjuntos dominantes em *grids*. Um conjunto dominante de um grafo G é um subconjunto D de seu conjunto de vértices, tal que todo vértice de G ou pertence a D , ou é adjacente a um elemento de D . Sabe-se que a determinação do *número de dominação*, isto é, da cardinalidade de um menor conjunto dominante possível, é um problema NP-difícil para grafos arbitrários. Entretanto, esse número é conhecido para a subclasse dos grids nos casos em que $1 \leq m \leq 6$ [1, 8]. Neste texto, fornecemos um limite superior para o número de dominação de $G_{m \times n}$, com $7 \leq m \leq 10$, bem como um algoritmo polinomial para obtenção de conjuntos dominantes cujos tamanhos atingem esse limite. Chang, Clark e Hare obtiveram limitantes similares [2], mas os resultados aqui apresentados foram desenvolvidos independentemente do trabalho destes autores.

1 Introdução

Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Um *conjunto dominante* de G é um conjunto $D \subseteq V(G)$, tal que cada vértice de G ou pertence a D , ou é adjacente a algum elemento de D . Por exemplo, para o grafo abaixo, $D = \{v_1, v_3\}$ é um conjunto dominante.

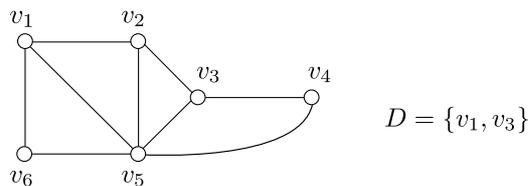


Figura 1: Exemplo de conjunto dominante.

Adicionalmente, para todo $u \in D$ e $v \in V(G) - D$, tais que $uv \in E(G)$, dizemos que u *domina* v , e que v é *dominado* por u . No exemplo anterior, v_1 domina v_2 , v_5 e v_6 , enquanto v_3 domina v_2 , v_4 e v_5 . Note que os vértices v_2 e v_5 são dominados tanto por v_1 quanto por v_3 .

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP. Trabalho desenvolvido com bolsa de iniciação científica FAPESP, processo 2008/54219-5

O próprio conjunto de vértices de um grafo é um conjunto dominante trivial. Dessa forma, a dificuldade ao procurar conjuntos dominantes de um grafo, é obter um conjunto cujo tamanho seja o menor possível. A cardinalidade de tal conjunto é denominada *número de dominação* do grafo, o qual é denotado por $\gamma(G)$.

O *problema dos conjuntos dominantes* diz respeito, então, à determinação de $\gamma(G)$ para um dado grafo G . Pode-se provar que este problema é NP-difícil a partir de uma redução do problema de cobertura de arestas por vértices (*vertex cover*) [5].

Neste texto, iremos nos restringir a uma classe específica de grafos, os grids. Dados P_m e P_n dois caminhos de m e n vértices, respectivamente, um *grid* $G_{m \times n}$ pode ser visto como o produto cartesiano de P_m e P_n . Grids são grafos planares, isto é, admitem um desenho no plano sem cruzamento de arestas. Dessa forma, são usualmente representados como na Figura 2, com os vértices dispostos em m linhas e n colunas.

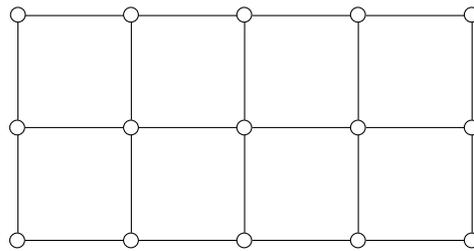


Figura 2: Representação planar do grid $G_{3 \times 5}$.

Em 1983, M. S. Jacobson e L. F. Kinch [8] resolveram o problema dos conjuntos dominantes para $G_{m \times n}$, com $m = 1, 2, 3$ e 4 , obtendo os primeiros números de dominação apresentados na Tabela 1 [7]. Alguns anos mais tarde, E. O. Hare [6] desenvolveu um algoritmo para computar $\gamma(G_{m \times n})$ e o utilizou para conjecturar fórmulas simples para os casos em que $1 \leq m \leq 10$. Em 1993, as fórmulas de Hare para $m = 5$ e $m = 6$, também contidas na Tabela 1, foram provadas por Chang e Clark [1].

Neste trabalho, procuramos estudar os casos em que $7 \leq m \leq 10$, obtendo, como resultado, métodos para a construção de conjuntos dominantes de tamanho relativamente pequeno nos grids correspondentes. Dessa forma, pode-se definir limites superiores para $\gamma(G_{m \times n})$, os quais se acredita serem iguais, ou pelo menos bastante próximos, ao número de dominação de $G_{m \times n}$.

Apenas ao fim do desenvolvimento do trabalho tomou-se conhecimento das fórmulas de Hare e da existência de provas de que as mesmas representam de fato limites superiores para os números de dominação dos casos aqui estudados [2]. Dessa forma, todos os resul-

tados foram obtidos de maneira independente. Os limites presentes neste texto são iguais às fórmulas de Hare nos casos em que $m = 7, 8, 9$. Para o caso em que $m = 10$, a fórmula de Hare fornece um limite superior um pouco melhor.

$$\begin{aligned} \gamma(G_{1 \times n}) &= \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor, n \geq 1 \\ \gamma(G_{2 \times n}) &= \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor, n \geq 1 \\ \gamma(G_{3 \times n}) &= \lfloor \frac{3n+4}{4} \rfloor, n \geq 1 \\ \gamma(G_{4 \times n}) &= \begin{cases} k+1, n = 1, 2, 3, 5, 6, 9 \\ k, \text{ caso contrário para } n \geq 1 \end{cases} \\ \gamma(G_{5 \times n}) &= \begin{cases} \lfloor \frac{6n+6}{5} \rfloor, n = 2, 3, 7 \\ \lfloor \frac{6n+8}{5} \rfloor, \text{ caso contrário para } n \geq 1 \end{cases} \\ \gamma(G_{6 \times n}) &= \begin{cases} \lfloor \frac{10n+10}{7} \rfloor, n \geq 6 \text{ e } n \equiv 1 \pmod{7} \\ \lfloor \frac{10n+12}{7} \rfloor, \text{ caso contrário se } n \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Tabela 1: Números de dominação para $G_{m \times n}$, com $1 \leq m \leq 6$.

A seção a seguir define as formas básicas de representação e notação adotadas ao longo do texto. Os resultados principais, ou seja, os limitantes superiores para o número de dominação dos grids estudados, são apresentados e demonstrados na Seção 3.

2 Preliminares

Conforme mencionado anteriormente, um conjunto dominante D de um grafo G é um subconjunto de seu conjunto de vértices. Dessa forma, podemos representá-lo graficamente ilustrando os vértices pertencentes a D como círculos cheios e os demais vértices como círculos vazados. Portanto, para o conjunto dominante do grafo da Figura 1, essa representação seria:

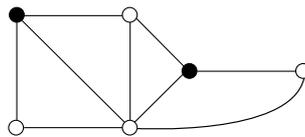


Figura 3: Representação de conjunto dominante.

Particularmente, para um grid $G_{m \times n}$, consideraremos que os vértices estarão sempre dispostos em m linhas e n colunas, de maneira semelhante à apresentada na Figura 2. Assim, iremos eliminar o desenho das arestas na representação gráfica, para facilitar a visualização. Além disso, serão incluídos delineamentos da vizinhança dominada por cada vértice do conjunto dominante. Um exemplo desta representação de conjunto dominante de um grid pode ser vista na Figura 4.

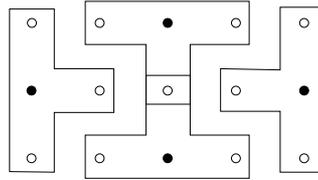


Figura 4: Representação de um conjunto dominante no $G_{3 \times 5}$.

Se o parâmetro n de um grid $G_{m \times n}$ for relativamente grande, pode ser útil representá-lo como a união de grids menores, cada um deles tratado como um bloco. Nesse caso, a delimitação dos blocos será realizada com uma linha vertical. Quando necessário, serão incluídos ainda rótulos para cada bloco (Figura 5).

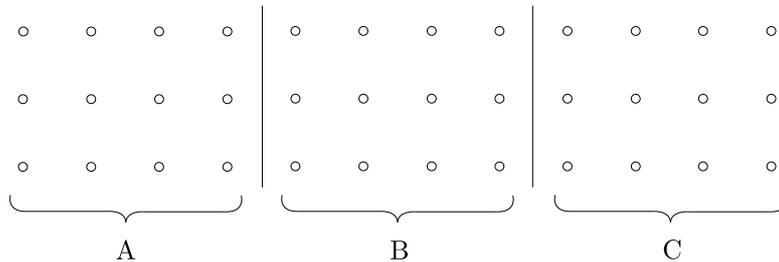
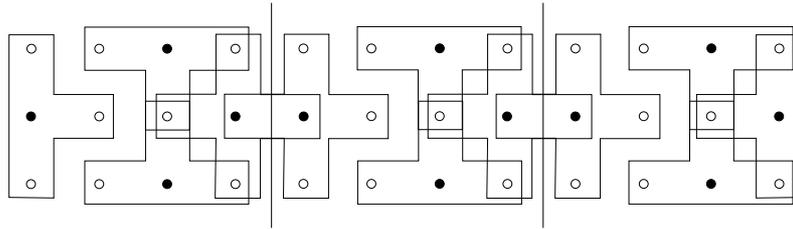


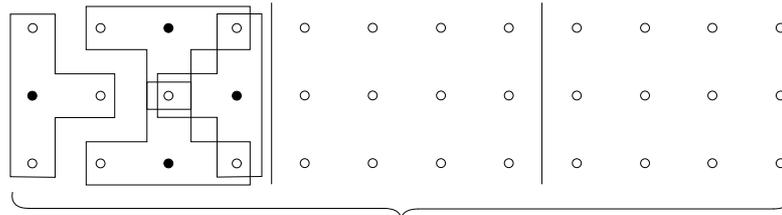
Figura 5: Divisão de um grid em grids menores (blocos) rotulados.

Considere o conjunto dominante para o grid $G_{3 \times 12}$ exibido na Figura 6(a). Dentre as possíveis divisões do grafo em grids menores, se realizarmos aquela esquematizada na Figura 5, notamos que todos os blocos têm dimensões iguais e os vértices do conjunto dominante se encontram nas mesmas coordenadas relativas dentro de cada bloco. Dada essa repetição, podemos representar somente os vértices do conjunto dominante pertencentes a um único bloco. Os vértices restantes do conjunto dominante são omitidos e substituídos por uma indicação de que os três blocos são “iguais”, através do uso de chaves (Figura 6(b)) ou rótulos iguais para blocos semelhantes (Figura 6(c)).

Observe agora os vértices que se encontram na segunda linha e quarta coluna de cada bloco do grafo da Figura 6(a). Nos dois primeiros blocos, esses vértices dominam um vértice pertencente ao bloco vizinho. Contudo, nas Figuras 6(b) e 6(c), o delineamento da vizi-

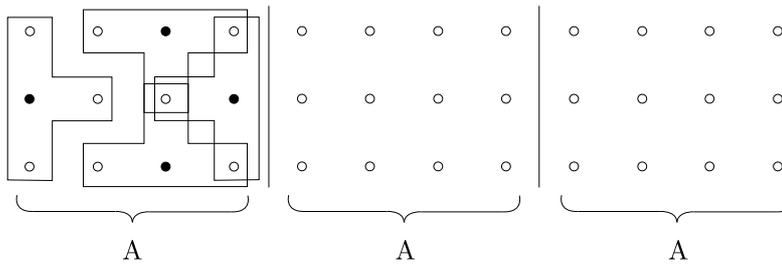


(a) Representação de um conjunto dominante para $G_{3 \times 12}$.



3 blocos de 3×4 vértices

(b) Representação do mesmo conjunto, omitindo as indicações nos dois últimos blocos e utilizando uma chave para agrupar blocos semelhantes.



(c) Representação do mesmo conjunto, omitindo as indicações nos dois últimos blocos e utilizando rótulos.

Figura 6: Representações de conjunto dominante.

nhança dominada ficou restrito ao interior do bloco. Nestes exemplos, porém, as relações de dominação destacadas são suficientes para demonstrar que ao considerarmos os três blocos, teremos de fato um conjunto dominante para o grafo maior. Entretanto, dependendo da divisão em blocos utilizada, é possível que a relação de dominação entre vértices pertencentes a blocos distintos seja relevante. Nessa situação, o delineamento ultrapassará os limites do bloco que contém o vértice no conjunto dominante e passará a ser representado, fora do bloco, com linhas pontilhadas. Ou seja, um vértice envolto por linhas pontilhadas é dominado por um vértice do bloco vizinho. Como um exemplo, considere a Figura 7. Os dois primeiros blocos são idênticos aos blocos da ilustração anterior. Porém, o último bloco, rotulado bloco B, tem o seu vértice da primeira coluna e segunda linha dominado por um vértice do bloco anterior. Essa relação é destacada pelas linhas pontilhadas saindo dos blocos A e entrando no bloco B.

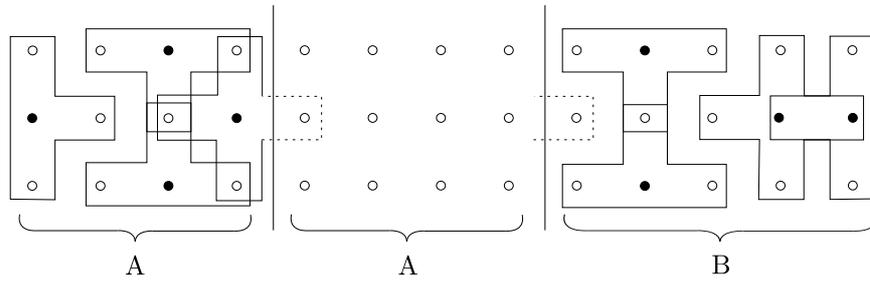


Figura 7: Representação de um conjunto dominante para $G_{3 \times 13}$.

3 Resultados

A seguir, serão apresentados os limites superiores obtidos para $\gamma(G_{m \times n})$, nos casos em que $7 \leq m \leq 10$, organizados na forma de quatro teoremas. Deve-se ressaltar que como $G_{m \times n}$ é isomorfo a $G_{n \times m}$, então $\gamma(G_{m \times n}) = \gamma(G_{n \times m})$. Dessa forma, como a Tabela 1 fornece os números de dominação para os casos em que $n \leq 6$, iremos considerar apenas aqueles nos quais $n \geq 7$.

Teorema 1 $\gamma(G_{7 \times n}) \leq 5 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 (n \bmod 3)\}$, para $n \geq 7$.

Demonstração.

Considere $n = 7$. Podemos mostrar que $\gamma(G_{7 \times 7}) \leq 5 \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 (7 \bmod 3)\} = 12$, exibindo um conjunto dominante de $G_{7 \times 7}$ de tamanho 12, conforme visto na Figura 8.

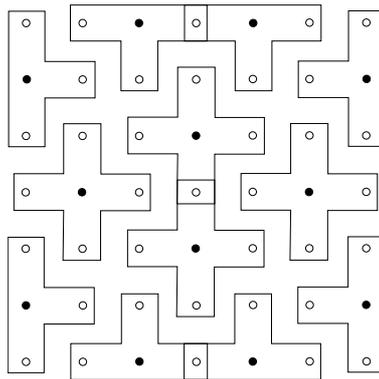


Figura 8: Conjunto dominante de tamanho 12 para $G_{7 \times 7}$.

Suponha agora que $n > 7$. Consideraremos três casos principais.

Caso 1.1 $n \equiv 0 \pmod{3}$

Como $n \geq 7$, podemos escrever $n = 7 + k$ e considerar $G_{7 \times n}$ como a união dos grids $G_{7 \times 7}$ e $G_{7 \times k}$. Assim, um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$ pode ser construído como a união de conjuntos dominantes para $G_{7 \times 7}$ e $G_{7 \times k}$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{7 \times n}) &\leq \gamma(G_{7 \times 7}) + \gamma(G_{7 \times k}) \\
 &\leq 12 + 5 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 4 \quad (\text{pois } n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 2 \pmod{3}) \\
 &= 15 + 5 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 1 \\
 &= 10 + 5 \left\lfloor \frac{k+1}{3} \right\rfloor + 1 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{6+k+1}{3} \right\rfloor + 1 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 \pmod{3}\}
 \end{aligned}$$

Caso 1.2 $n \equiv 1 \pmod{3}$

Podemos escrever $n = 3k + 1 = 3(k - 1) + 4 = 3(k - 2) + 7$. Portanto, se k for ímpar, podemos tomar k' como $k' = \frac{k-1}{2}$ e, nesse caso, $n = 6k' + 4$. Por outro lado, se k for par, tomamos $k' = \frac{k-2}{2}$ e $n = 6k' + 7$. Tratando essas duas possibilidades separadamente, temos:

Caso 1.2.1 $n = 6k' + 4$, para $k' = \frac{k-1}{2}$ e k ímpar.

Podemos considerar o grid $G_{7 \times n}$ como sendo composto de um bloco de 7×4 vértices e k' blocos de 7×6 vértices. Construímos, então, um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$ como indicado na Figura 9.

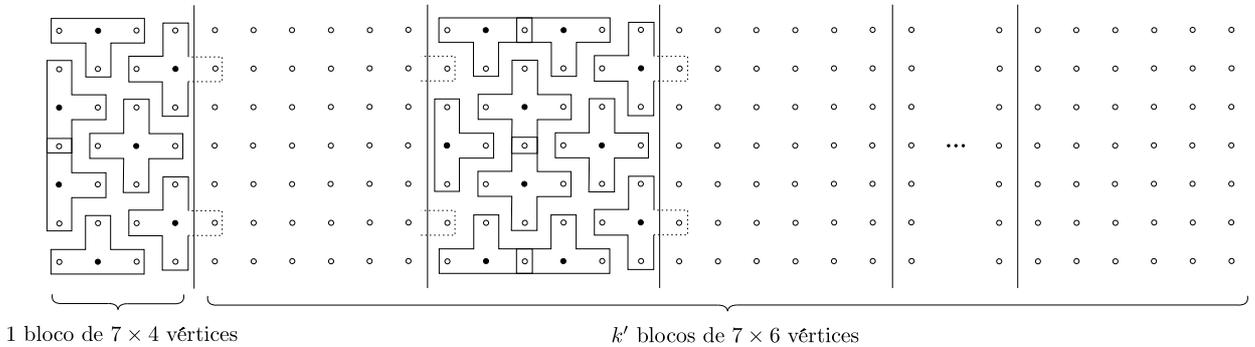


Figura 9: Construção de um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$, $n = 6k' + 4$.

Para o bloco de tamanho 7×4 existem 7 vértices no conjunto dominante, enquanto que para cada bloco de tamanho 7×6 foram utilizados 10 vértices. Logo:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{7 \times n}) &\leq 7 + 10k' \\
 &= 5(2k') + 5 + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{6k'}{3} \right\rfloor + 5 \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{6k' + 4}{3} \right\rfloor + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 (n \bmod 3)\}
 \end{aligned}$$

Caso 1.2.2 $n = 6k' + 7$, para $k' = \frac{k-2}{2}$ e k par.

Dessa vez, consideramos o grid $G_{7 \times n}$ como sendo composto de um bloco de 7×7 vértices e k' blocos de 7×6 vértices. A construção de um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$ pode ser realizada conforme indicado na Figura 10.

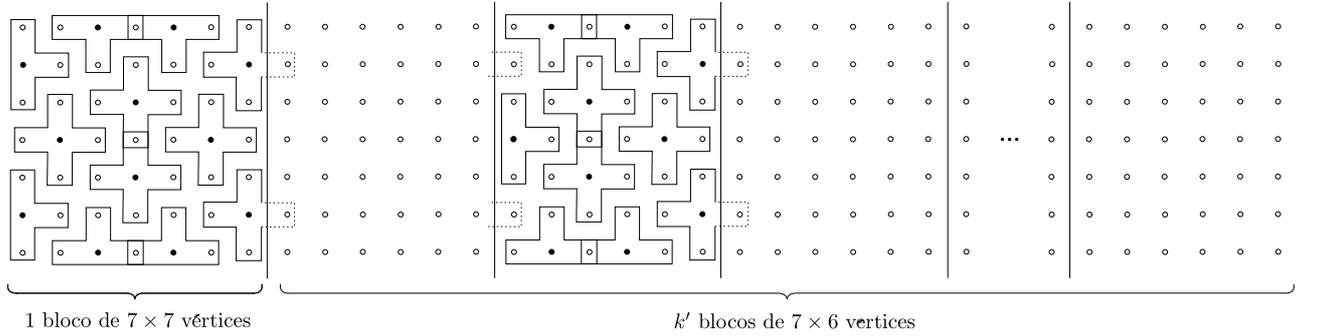


Figura 10: Construção de um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$, $n = 6k' + 7$.

Para o bloco de tamanho 7×7 existem 12 vértices no conjunto dominante, enquanto que para cada bloco de tamanho 7×6 foram utilizados 10 vértices. Portanto:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{7 \times n}) &\leq 12 + 10k' \\
 &= 5(2k') + 10 + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{6k'}{3} \right\rfloor + 5 \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{6k' + 7}{3} \right\rfloor + 2 \\
 &= 5 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 (n \bmod 3)\}
 \end{aligned}$$

Caso 1.3 $n \equiv 2 \pmod{3}$

De maneira similar ao Caso 1.1, escrevemos $n = 7 + k$. Construimos um conjunto dominante para $G_{7 \times n}$ a partir de conjuntos dominantes de $G_{7 \times 7}$ e $G_{7 \times k}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{7 \times n}) &\leq \gamma(G_{7 \times 7}) + \gamma(G_{7 \times k}) \\
&\leq 12 + 5 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 2 \quad (\text{pois } n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 1 \pmod{3}) \\
&= 10 + 5 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 4 \\
&= 10 + 5 \left\lfloor \frac{k+1}{3} \right\rfloor + 4 \\
&= 5 \left\lfloor \frac{6+k+1}{3} \right\rfloor + 4 \\
&= 5 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 2 \pmod{3}\}
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

Teorema 2 $\gamma(G_{8 \times n}) \leq 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2 \pmod{8} + \min\{1, (n+1) \pmod{8}\}$, para $n \geq 7$.

Demonstração.

Assim como para os grids $G_{7 \times n}$, realizamos uma prova por indução forte. Dessa vez, consideramos os quatro casos a seguir.

Caso 2.1 $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}$

Podemos escrever n como $n = 8k' + r'$, onde $k' = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ e $r' = n \pmod{8}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
n &= 8k' + r' \\
&= 8(k' - 1) + (8 + r') \\
&= 8k + r, \text{ onde } k = k' - 1 \text{ e } r = r' + 8
\end{aligned}$$

Note que $r' \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow r \in \{8, 9, 10\}$. Além disso, se $n \geq 8$, então $k' \geq 1$ e $k \geq 0$. Consideramos o grid como sendo composto de k blocos de 8×8 vértices mais um bloco de $8 \times r$ vértices.

Para obter um conjunto dominante para $G_{8 \times n}$, utilizamos três tipos diferentes de blocos. A Figura 11 exibe os três blocos para o caso $n \equiv 1 \pmod{8}$.

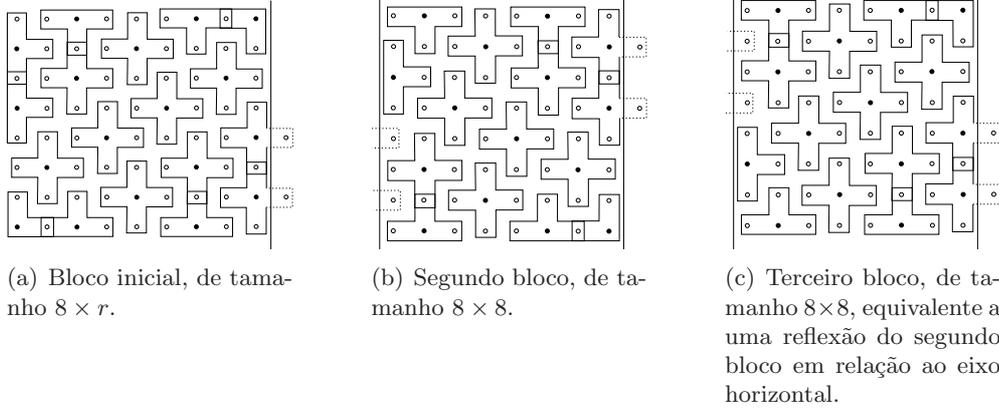


Figura 11: Blocos utilizados na construção de conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ e $n \equiv 1 \pmod{8}$.

O primeiro bloco contém 8×9 vértices, mas podemos considerá-lo genericamente como contendo $8 \times r$ vértices. Na construção do conjunto dominante para o grid original, esse bloco aparece apenas uma vez, no início. Já o segundo e o terceiro bloco são ambos de tamanho 8×8 . Mais do que isso, o terceiro bloco é o reflexo do segundo bloco em relação ao eixo horizontal. Dessa forma, utilizamos estes dois blocos alternadamente k vezes até construirmos um conjunto dominante para $G_{8 \times n}$. Esse procedimento é ilustrado na Figura 12 para os valores de r que estamos considerando. Note que é necessário que a seqüência alternada se inicie com um bloco como o da Figura 11(b) devido às relações de dominância entre os vértices dos dois primeiros blocos. A partir deste ponto, sempre que quisermos indicar o uso de um mesmo bloco repetidas vezes, mas com orientação alternada, iremos utilizar uma representação compacta como a da Figura 12.

Por inspeção, verificamos que em cada um dos casos, o bloco de $8 \times r$ vértices, $r \in \{8, 9, 10\}$, contém $15 + 2(r \bmod 8) + \min\{1, (r + 1) \bmod 8\}$ vértices no conjunto dominante. Além disso, os k blocos de 8×8 vértices adicionam, no total, $15k$ vértices no conjunto dominante. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{8 \times n}) &\leq 15 + 2(r \bmod 8) + \min\{1, (r + 1) \bmod 8\} + 15k \\
 &= 15(k + 1) + 2(r \bmod 8) + \min\{1, (r + 1) \bmod 8\} \\
 &= 15(k + 1) + 2(n \bmod 8) + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\} \\
 &= 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2(n \bmod 8) + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\}
 \end{aligned}$$

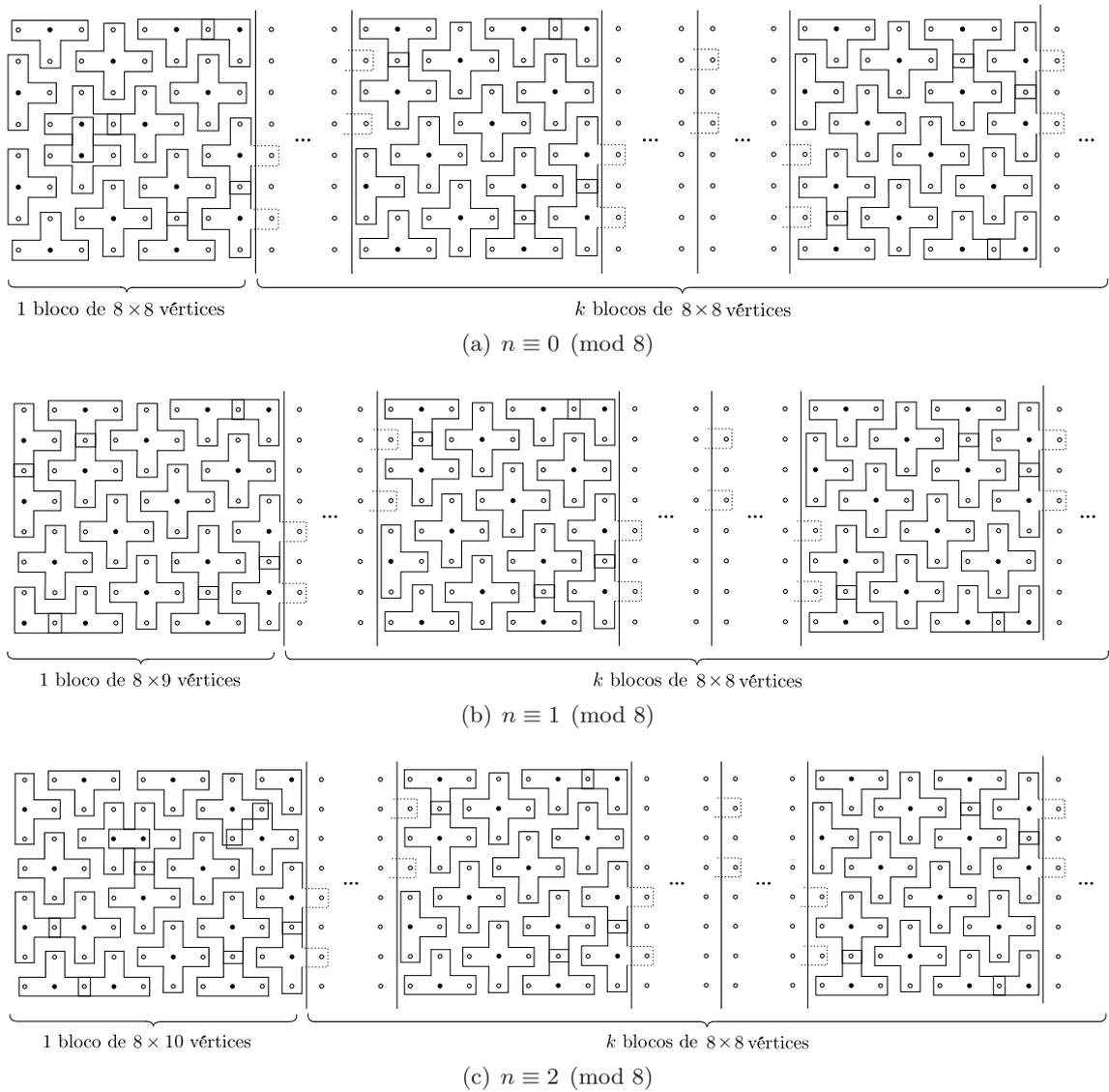


Figura 12: Construção de conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ e $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}$.

Caso 2.2 $n \equiv 3 \pmod{8}$

Obtemos um conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ a partir da união de conjuntos dominantes de tamanho mínimo dos grids $G_{8 \times 4}$ e $G_{8 \times k}$, onde $k = n - 4$. Como $\gamma(G_{8 \times 4}) = 8$, temos:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{8 \times n}) &\leq \gamma(G_{8 \times 4}) + \gamma(G_{8 \times k}) \\
&\leq 8 + 15 \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + 2 (k \bmod 8) + \min\{1, (k + 1) \bmod 8\} \\
&= 8 + 15 \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + 2 (7) \quad (\text{pois } n \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow k \equiv 7 \pmod{8}) \\
&= 8 + 15 \left\lfloor \frac{k + 4}{8} \right\rfloor - 15 + 14 \\
&= 15 \left\lfloor \frac{k + 4}{8} \right\rfloor + 6 + 1 \\
&= 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2 (n \bmod 8) + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\}
\end{aligned}$$

Caso 2.3 $n \equiv 4, 5, 6 \pmod{8}$

Assim como no Caso 2.2, consideramos $n = 4 + k$ e construímos um conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ a partir de conjuntos dominantes de $G_{8 \times 4}$ e $G_{8 \times k}$. Observe, porém, que agora valem as seguintes relações:

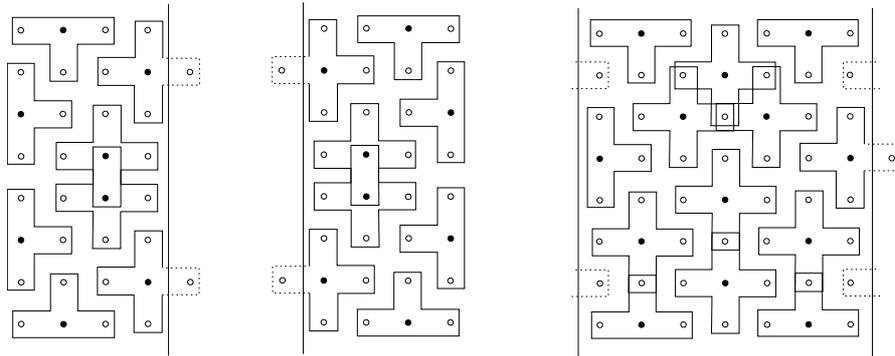
- (i) $\left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$
- (ii) $k \bmod 8 = (n \bmod 8) - 4$
- (iii) $(n + 1) \bmod 8 \geq 5 \Rightarrow (k + 1) \bmod 8 \geq 1$

Dessa forma, lembrando que $\gamma(G_{8 \times 4}) = 8$, o número de dominação $\gamma(G_{8 \times n})$ é tal que:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{8 \times n}) &\leq \gamma(G_{8 \times 4}) + \gamma(G_{8 \times k}) \\
&\leq 8 + 15 \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + 2 (k \bmod 8) + \min\{1, (k + 1) \bmod 8\} \\
&= 8 + 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2 [(n \bmod 8) - 4] + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\} \\
&= 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2 (n \bmod 8) + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\}
\end{aligned}$$

Caso 2.4 $n \equiv 7 \pmod{8}$

Neste caso, iremos utilizar uma variedade maior de blocos para a construção do conjunto dominante, conforme apresentado na Figura 13. Observe que o bloco A^v corresponde ao bloco A refletido em relação ao eixo vertical, enquanto que C^h é o bloco C refletido em relação ao eixo horizontal. Além disso, o bloco B é um bloco C^h sem a sua primeira coluna. Em decorrência dessas relações, o conjunto dominante formado será bastante simétrico.



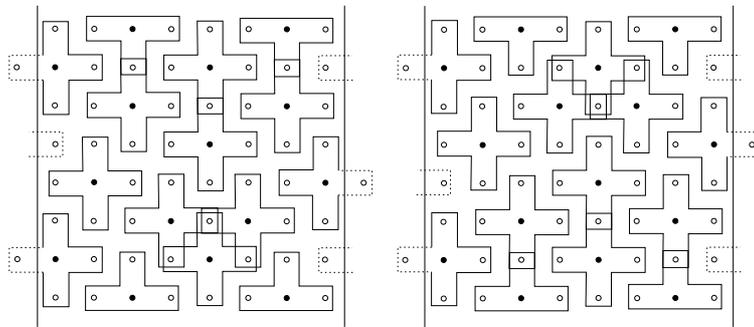
A

A^v

B

(a) Blocos de 8×4 vértices. Incluem 8 vértices no conjunto dominante.

(b) Bloco de 8×7 vértices. Inclui 13 vértices no conjunto dominante.



C

C^h

(c) Blocos de 8×8 vértices. Incluem 15 vértices no conjunto dominante.

Figura 13: Blocos utilizados para construção de conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ e $n \equiv 7 \pmod{8}$.

Considere $n = 8k + 7 = 8(k - 1) + 15 = 4 + 7 + 8(k - 1) + 4$. Obtemos um conjunto dominante para $G_{8 \times n}$ dividindo-o em $k + 2$ blocos, conforme exemplificado na Figura 14. O primeiro deles, é um bloco de 8×4 vértices e para a construção do conjunto dominante

consideramos este bloco como sendo um bloco A . O segundo bloco, de 8×7 , é um bloco B . Em seguida, utilizamos uma série de $k - 1$ blocos C e C^h , de forma alternada, iniciando com um bloco C . O último bloco é um bloco A^v .

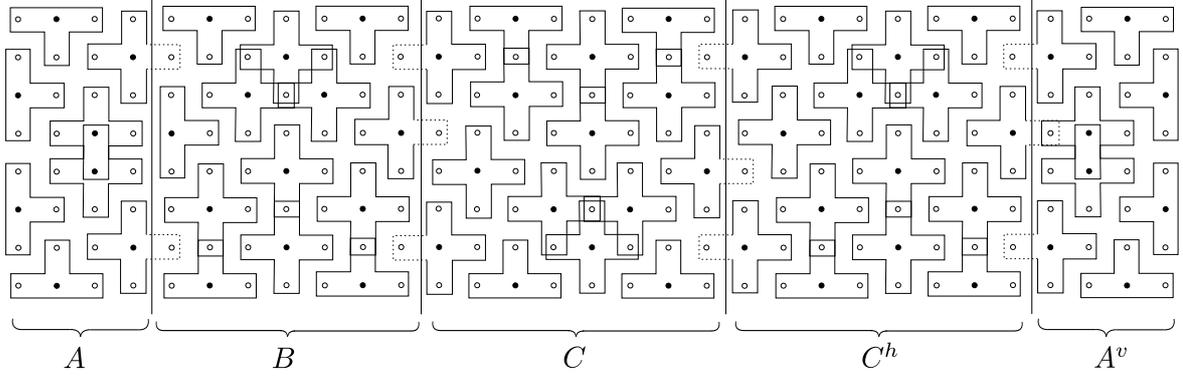


Figura 14: Construção de conjunto dominante para $G_{8 \times 31}$, $31 \equiv 7 \pmod{8}$.

Sendo assim:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{8 \times n}) &\leq 8 + 13 + 15(k - 1) + 8 \\
 &= 15(k - 1) + 15 + 14 \\
 &= 15k + 14 \\
 &= 15 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2(n \bmod 8) + \min\{1, (n + 1) \bmod 8\} \quad (\text{lembrando que } n \equiv 7 \pmod{8})
 \end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se a demonstração do Teorema 2. \square

Teorema 3 $\gamma(G_{9 \times n}) \leq \begin{cases} 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2(n \bmod 11) + 1, & \text{se } n \equiv 0, 1 \pmod{11} \\ 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2(n \bmod 11) + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ para } n \geq 7.$

Demonstração.

Mais uma vez, realizamos uma prova por indução, considerando os casos a seguir.

Caso 3.1 $n \equiv 0 \pmod{11}$

Podemos considerar $n \geq 11$ e, portanto, escrever $n = 11 + 11k$, $k \geq 0$. Ou seja, consideramos $G_{9 \times n}$ como sendo composto por $k + 1$ blocos de 9×11 vértices. Para a

construção do conjunto dominante, utilizamos 24 vértices do primeiro bloco e 23 vértices dos k blocos restantes, conforme a Figura 15.

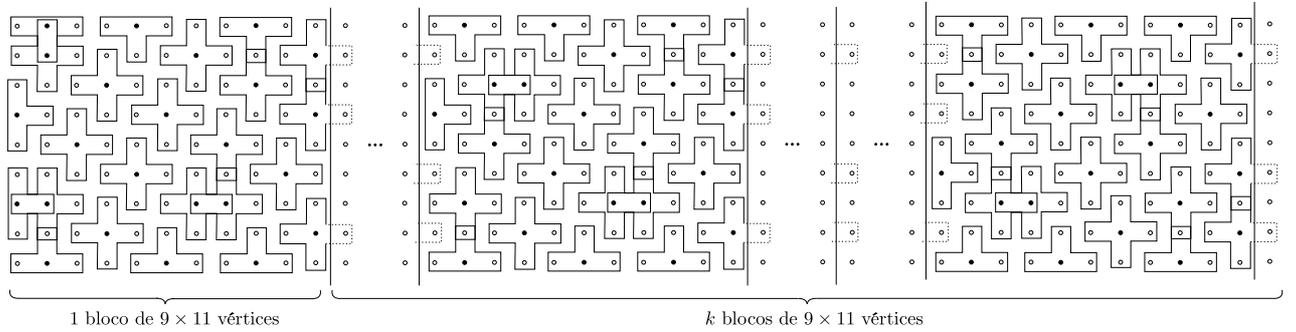


Figura 15: Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 0 \pmod{11}$.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{9 \times n}) &\leq 24 + 23k \\
 &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} - 1 \right\rfloor + 24 \\
 &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor - 23 + 24 \\
 &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 1 \\
 &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 1
 \end{aligned}$$

Caso 3.2 $n \equiv 1 \pmod{11}$

Neste caso, também podemos considerar $n \geq 11$. Logo, $n = 12 + 11k$, $k \geq 0$. Assim, o conjunto dominante é construído a partir de um bloco de 9×12 vértices e k blocos 9×11 vértices (Figura 16).

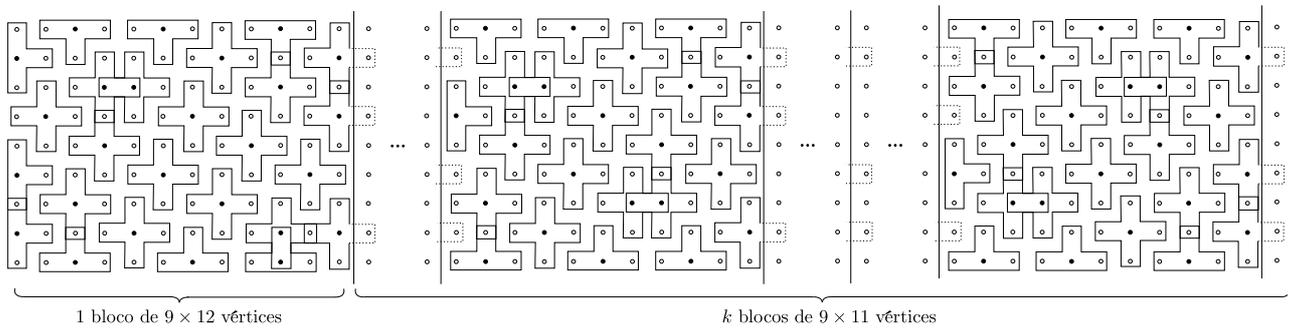


Figura 16: Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 1 \pmod{11}$.

O bloco de tamanho 9×12 possui 26 vértices no conjunto dominante, enquanto que cada um dos k blocos de tamanho 9×11 contém 23 vértices no conjunto dominante. Então:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{9 \times n}) &\leq 26 + 23k \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n-1}{11} - 1 \right\rfloor + 26 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n-1}{11} \right\rfloor - 23 + 26 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 + 1 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 1
\end{aligned}$$

Caso 3.3 $n \equiv 2 \pmod{11}$

Tomamos $n = 3 + k$ e consideramos $G_{9 \times n}$ como sendo a união dos grids $G_{9 \times 3}$ e $G_{9 \times k}$. Um conjunto dominante para o grid original é obtido a partir da união de conjuntos dominantes de tamanho mínimo destes grids menores. Como $\gamma(G_{9 \times 3}) = 7$ (Tabela 1), temos que:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{9 \times 3}) &\leq \gamma(G_{9 \times 3}) + \gamma(G_{9 \times k}) \\
&\leq 7 + 23 \left\lfloor \frac{k}{11} \right\rfloor + 2 (k \bmod 11) + 2 \quad (\text{pois } n \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow k \equiv 10 \pmod{11}) \\
&= 7 + 23 \left\lfloor \frac{k+3}{11} \right\rfloor - 23 + 2(10) + 2 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{k+3}{11} \right\rfloor + 2(2) + 2 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 2
\end{aligned}$$

Caso 3.4 $n \equiv 3, 4 \pmod{11}$

Escrevemos $n = 3 + k$ e construímos um conjunto dominante de maneira idêntica ao do caso 3.3. Dessa vez, porém:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{9 \times 3}) &\leq \gamma(G_{9 \times 3}) + \gamma(G_{9 \times k}) \\
&\leq 7 + 23 \left\lfloor \frac{k}{11} \right\rfloor + 2 (k \bmod 11) + 1 \quad (\text{pois } n \equiv 3, 4 \pmod{11} \Rightarrow k \equiv 0, 1 \pmod{11}) \\
&= 7 + 23 \left\lfloor \frac{k+3}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) - 2(3) + 1 \\
&= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 2
\end{aligned}$$

Caso 3.5 $n \equiv 5, 7, 8, 9, 10 \pmod{11}$

Podemos escrever $n = 11 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + r$, onde $r \in \{5, 7, 8, 9, 10\}$. Consideramos $G_{9 \times n}$ como sendo composto por um bloco de $9 \times r$ vértices e $k = \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor$ blocos de tamanho 9×11 . O conjunto dominante é construído com $2(r \bmod 11) + 2$ vértices para dominar o primeiro bloco, mais 23 vértices para cada um dos k blocos de tamanho 9×11 , conforme a Figura 18. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \gamma(G_{9 \times n}) &\leq 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (r \bmod 11) + 2 \\ &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 2 \end{aligned}$$

Caso 3.6 $n \equiv 6 \pmod{11}$

Consideramos $n = 11 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 6 = 11 \left\lfloor \frac{n}{11} - 1 \right\rfloor + 17 = 11k + 17$, com $k = \left\lfloor \frac{n}{11} - 1 \right\rfloor$. Dessa forma, podemos enxergar $G_{9 \times n}$ como sendo composto de um bloco de tamanho 9×17 e k blocos de tamanho 9×11 . A construção do conjunto dominante é feita como esquematizado na Figura 17.

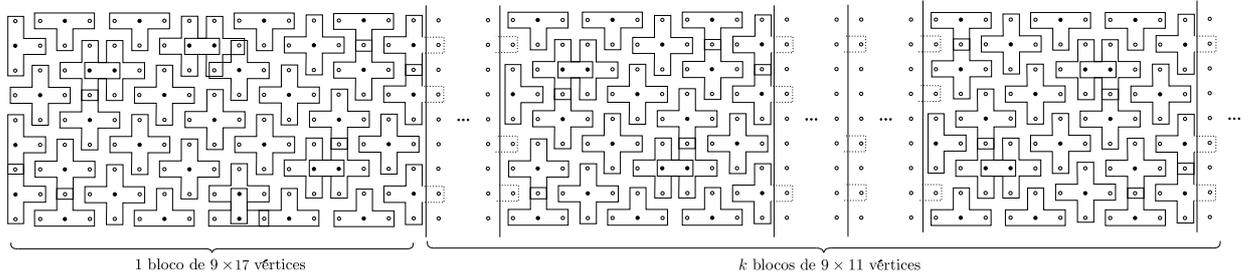
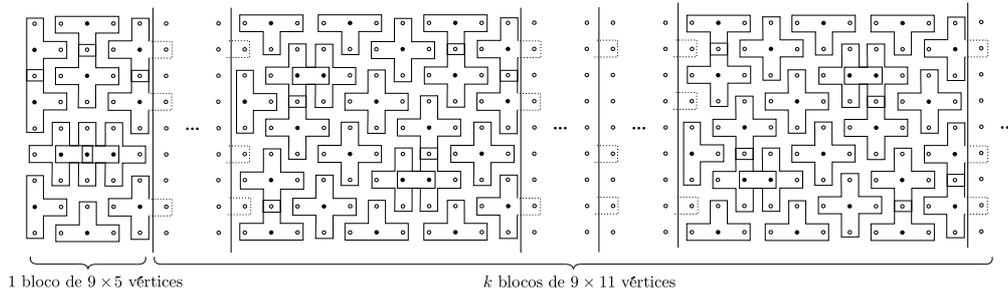


Figura 17: Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 6 \pmod{11}$.

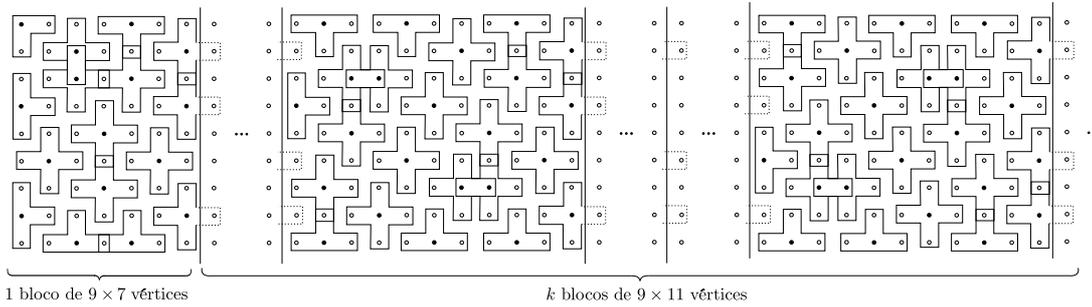
Como o primeiro bloco inclui 37 vértices no conjunto dominante e os k restantes adicionam, cada um, mais 23 vértices, temos:

$$\begin{aligned} \gamma(G_{9 \times n}) &\leq 37 + 23k \\ &= 37 + 23 \left\lfloor \frac{n}{11} - 1 \right\rfloor \\ &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor - 23 + 37 \\ &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2(6) + 2 \\ &= 23 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 2 (n \bmod 11) + 2 \end{aligned}$$

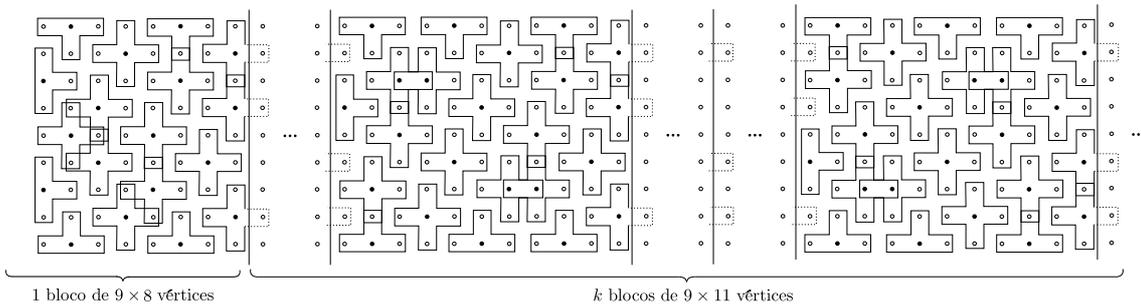
Portanto, o limite superior para $\gamma(G_{m \times n})$ está correto. \square



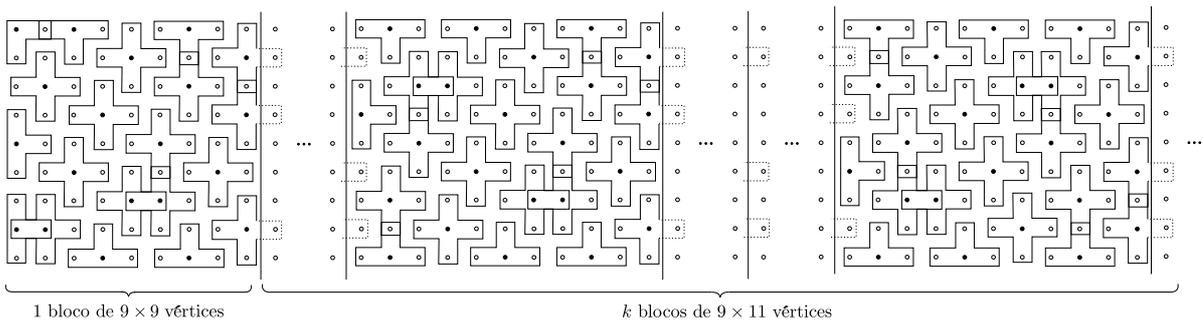
(a) Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 5 \pmod{11}$.



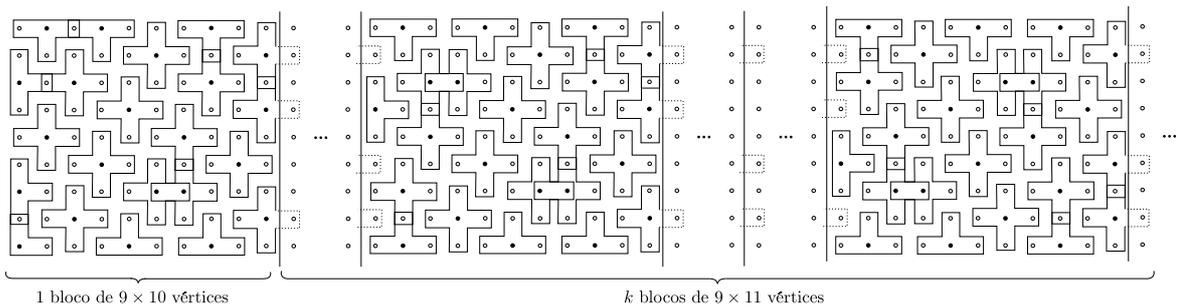
(b) Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 7 \pmod{11}$.



(c) Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 8 \pmod{11}$.



(d) Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 9 \pmod{11}$.



(e) Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 10 \pmod{11}$.

Figura 18: Construção de conjunto dominante para $G_{9 \times n}$ e $n \equiv 5, 7, 8, 9, 10 \pmod{11}$.

Teorema 4 $\gamma(G_{10 \times n}) \leq 7 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 3(n \bmod 3)\}$, para $n \geq 7$.

Demonstração.

Neste caso, a demonstração também faz uso de blocos e grids menores. Obtemos conjuntos dominantes para $G_{10 \times n}$, $n \geq 10$, considerando três casos.

Caso 4.1 $n \equiv 0 \pmod{3}$

Uma vez que $n \geq 12$, podemos escrever $n = 12 + 3k$. Considerando o grid composto por um bloco de 12×10 vértices e k blocos de 3×10 vértices, podemos construir um conjunto dominante conforme exibido na Figura 19.

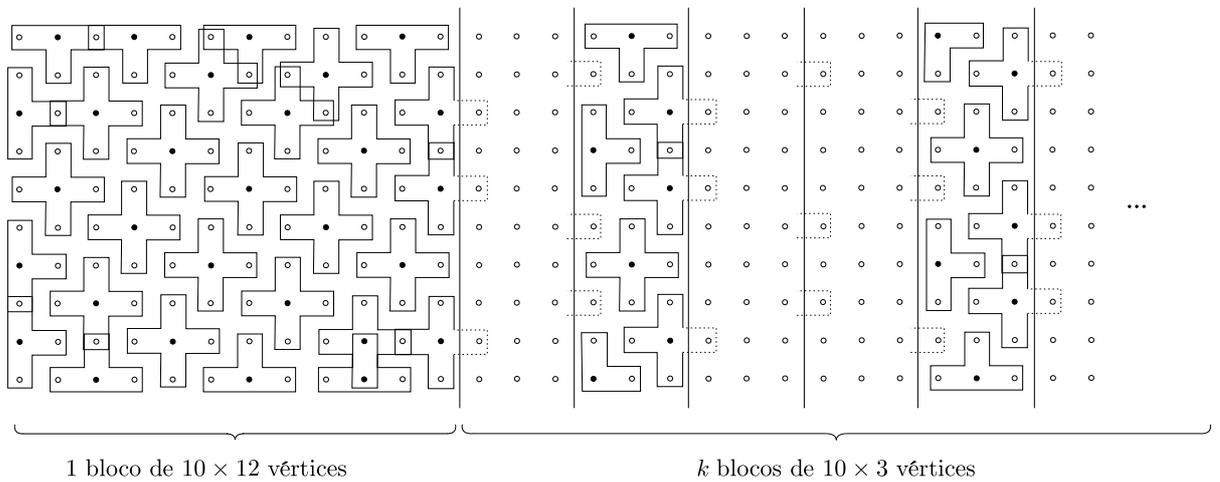


Figura 19: Construção de um conjunto dominante para $G_{10 \times n}$ e $n \equiv 0 \pmod{3}$.

O bloco de tamanho 10×12 contém 29 vértices do conjunto dominante, enquanto que os de tamanho 10×3 contêm 7. Então:

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_{10 \times n}) &\leq 29 + 7k \\
 &= 7 \left\lfloor \frac{3k + 12}{3} \right\rfloor - 7(4) + 29 \\
 &= 7 \left\lfloor \frac{3k + 12}{3} \right\rfloor + 1 \\
 &= 7 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 3(n \bmod 3)\}
 \end{aligned}$$

Caso 4.2 $n \equiv 1 \pmod{3}$

Neste caso, $n \geq 10$. Vamos supor inicialmente que $n = 10$. A Figura 20 exibe um conjunto dominante de tamanho $24 = 7 \lfloor \frac{10}{3} \rfloor + \max\{1, 3 \pmod{3}\}$ para o grafo $G_{10 \times 10}$.

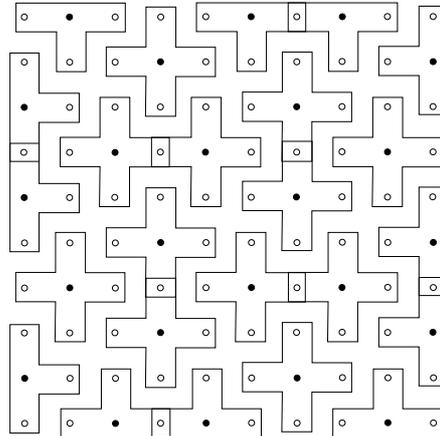


Figura 20: Construção de um conjunto dominante com 24 vértices para o $G_{10 \times 10}$.

Podemos considerar agora que $n > 10$ e, portanto, $n \geq 13$. Escrevendo $n = 13 + 3k$, construímos um conjunto dominante para $G_{10 \times n}$ conforme exibido na Figura 21, isto é, utilizando um bloco de 10×13 vértices e k blocos de 10×3 vértices.

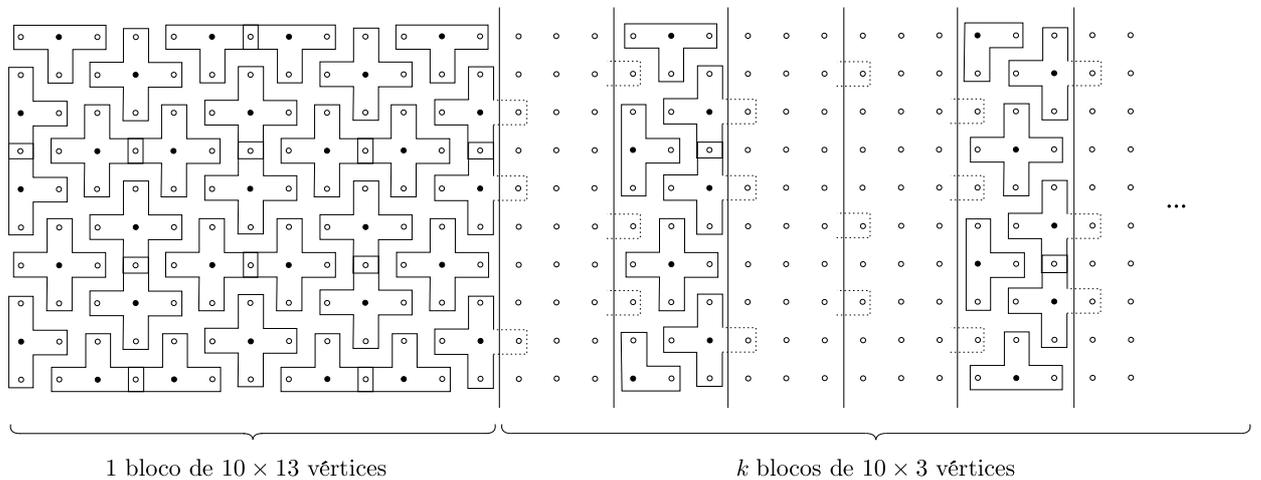


Figura 21: Construção de um conjunto dominante para $G_{10 \times n}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$.

O primeiro bloco, de tamanho 10×13 , contribui com 31 vértices para o conjunto dominante. Já cada um dos k blocos seguintes, de tamanho 10×3 , contribui com 7 vértices. Considerando o conjunto dominante completo, temos:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{10 \times n}) &\leq 31 + 7k \\
&= 7 \left\lfloor \frac{3k + 12}{3} \right\rfloor - 7(4) + 31 \\
&= 7 \left\lfloor \frac{3k + 12}{3} \right\rfloor + 3 \\
&= 7 \left\lfloor \frac{3k + 13}{3} \right\rfloor + 3 \\
&= 7 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 3(n \bmod 3)\}
\end{aligned}$$

Caso 4.3 $n \equiv 2 \pmod{3}$

Tomamos $n = 4 + k$ e consideramos $G_{10 \times n}$ como a união dos grids $G_{4 \times n}$ e $G_{k \times n}$. A união de conjuntos dominantes de tamanho mínimo desses dois grafos constitui um conjunto dominante para o grid maior. Assim:

$$\begin{aligned}
\gamma(G_{10 \times n}) &\leq \gamma(G_{10 \times 4}) + \gamma(G_{10 \times k}) \\
&\leq 10 + 7 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \max\{1, 3(k \bmod 3)\} \\
&= 10 + 7 \left\lfloor \frac{k + 4}{3} \right\rfloor - 7 + 3 \quad (\text{pois } n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 1 \pmod{3}) \\
&= 7 \left\lfloor \frac{k + 4}{3} \right\rfloor + 6 \\
&= 7 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \max\{1, 3(n \bmod 3)\}
\end{aligned}$$

Logo, o resultado do Teorema 4 segue. □

4 Conclusão

Ao obter um conjunto dominante para uma determinada classe de grafos, determinamos um limitante superior para o seu número de dominação. No caso dos grids, sua regularidade sugere que seus conjuntos dominantes também sigam um padrão repetitivo. Isso nos leva a crer que seus números de dominação possam ser expressos através de fórmulas que reflitam alguma periodicidade.

Neste trabalho, tiramos proveito da regularidade dos grids e elaboramos algoritmos que obtêm conjuntos dominantes relativamente pequenos para determinadas subclasses desses

grafos. Dessa forma, pudemos definir bons limitantes superiores para o número de dominação das classes estudadas. Além disso, para exemplos pequenos em que pudemos determinar com exatidão a cardinalidade mínima de um conjunto dominante, verificamos que os resultados obtidos são de fato iguais ou muito próximos ao número de dominação procurado.

Uma extensão natural deste trabalho é, portanto, tentar demonstrar que as fórmulas obtidas também valem como limitantes inferiores do número de dominação ou, caso esta proposição se prove falsa (como de fato sabemos que ocorre para a fórmula do Teorema 4), tentar obter limites superiores mais justos. Pode-se buscar também unificar os resultados atuais em uma única fórmula para $\gamma(G_{m \times n})$ que englobe tanto o parâmetro m , quanto n . Outra possibilidade é tentar relacionar estes resultados com os de conjuntos dominantes em outros tipos de produtos de caminhos ou em produtos cartesianos de grafos em geral [3, 4].

Referências

- [1] T. Y. Chang e W. E. Clark, *The domination numbers of the $5 \times n$ and the $6 \times n$ grid graphs*, Journal of Graph Theory, Vol. 17, Issue 1 (March 1993), 81-107.
- [2] T.Y. Chang, W. E. Clark e E. O. Hare, *Domination Numbers of Complete Grid Graphs, I*, Ars Combinatoria, Vol. 38 (1994), 97-111.
- [3] R. Chérifi, S. Gravier, X. Lagroula, C. Payan e I. Zighed, *Domination number of the cross product of paths*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 94, Number 1 (May 1999), 101-139(39).
- [4] S. Erfang1, S. Liang e K. Liying, *Some results on domination number of products of graphs*, Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities, Vol. 13, Number 1 (March 1998), 103-108.
- [5] M. R. Garey e D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman (1979).
- [6] E. O. Hare, *Algorithms for grid and grid-like graphs*, Ph. D. Thesis, Dept. Computer Sci., Clemson University (1989).
- [7] T. W. Haynes, S. Hedetniemi e P. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, CRC (1998).
- [8] M. S. Jacobson e L. F. Kinch, *On the domination number of products of graphs I*, Ars Combinatoria, Vol. 18 (1983), 33-44.