# Algoritmos de Aproximação para Problemas de Empacotamento

Flávio Keidi Miyazawa[†§]
Instituto de Computação — Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 6176 — CEP 13083-970 — Campinas - SP, Brasil
E-mail: fkm@dcc.unicamp.br

Yoshiko Wakabayashi[‡§]
Instituto de Matemática e Estatística — Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010 — CEP 05508-900 — São Paulo - SP, Brasil
E-mail: yw@ime.usp.br

**Resumo**

Mencionamos os principais resultados apresentados na tese de doutorado de Flávio Keidi Miyazawa [21], desenvolvida sob a orientação da Professora Dra. Yoshiko Wakabayashi no Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Consideramos os seguintes problemas: o *problema de empacotamento em faixa*, o *problema de empacotamento em placas*, o *problema de empacotamento tridimensional* e o *problema de empacotamento em contêineres*. Esses problemas são $\mathcal{NP}$-difíceis, não aproximáveis—em termos absolutos—além de certas constantes. Desenvolvemos algoritmos de aproximação (polinomiais) para esses problemas e analisamos o seu desempenho assintótico. Vários dos algoritmos que desenvolvemos têm limites de desempenho assintótico melhores que o de outros algoritmos mencionados na literatura. Para algumas variantes desses problemas nenhum algoritmo de aproximação era conhecido.

**Abstract**

We mention the main results presented in the Doctorate thesis of Flávio Keidi Miyazawa [21], developed under the supervision of Professor Dr. Yoshiko Wakabayashi at the Computer Science Department of the Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo. We consider the following problems: the *strip packing problem*, the *two-dimensional bin packing problem*, the *three-dimensional packing problem* and the *container packing problem*. These problems are $\mathcal{NP}$-hard, not approximable—in the absolute sense—within certain constants. We design (polynomial) approximation algorithms for these problems, and analyse their asympotic performance bound. The asymptotic performance bounds for a number of these algorithms are better than the ones known for the algorithms mentioned in the literature. For some variants of these problems no approximation algorithm were known.

[†] Bolsista de Doutorado do CNPq (1994–1997).
[‡] Membro do Projeto Temático FAPESP – Proc. 96/04505-2, Bolsista de Pesquisa do CNPq – Proc. 304527/89-0.
[§] Membro do Projeto ProNEx 107/97 (MCT/FINEP) e Projeto PCE (ProTeM-CC-III/CNPq).

# Introdução

Problemas de empacotamento consistem em colocar, de uma forma econômica, uma coleção de objetos dentro de recipientes. Esses problemas podem diferir em duas linhas conforme o objetivo do problema de otimização em questão. Em uma destas linhas, o objetivo é minimizar o número de recipientes usados para empacotar os objetos. Em outra linha, os objetos devem ser empacotados em apenas um recipiente, sendo que este recipiente tem apenas uma dimensão ilimitada e todas as outras são limitadas. Neste caso, o objetivo é minimizar o 'tamanho' do empacotamento com relação à dimensão ilimitada do recipiente.

Não definiremos formalmente o conceito de empacotamento, já que o conhecimento informal será suficiente para os nossos propósitos aqui. Só lembramos que num empacotamento (uma função que associa cada objeto a uma posição dentro do recipiente, este último visto como uma região num certo espaço) nenhum objeto pode se sobrepor a outro (dois objetos não podem ocupar o mesmo espaço), e nenhum objeto pode ser colocado fora dos limites do recipiente.

Investigamos as versões em que os objetos e os recipientes são bi- ou tridimensionais, e de 'formas ortogonais'. Assim, os objetos são retângulos ou caixas retangulares e os recipientes são faixas, placas, caixas de altura ilimitada ou caixas de dimensões finitas (contêineres). Mais ainda, todos os empacotamentos são ortogonais, *i.e.,* as arestas dos objetos a serem empacotados são ortogonais ou paralelas às do recipiente.

Abordamos os seguintes problemas: o *problema de empacotamento em faixa*, o *problema de empacotamento em placas*, o *problema de empacotamento tridimensional* e o *problema de empacotamento em contêineres*. Descrevemos algoritmos *on-line* e *off-line* tanto para o caso orientado como para o caso em que rotações ortogonais são permitidas (isto é, os objetos a serem empacotados são dados com uma certa orientação, mas podem sofrer rotação de 90 graus no momento em que são empacotados).

Os resultados apresentados na tese de doutorado de Miyazawa [21] são todos relativos ao desenvolvimento e análise de algoritmos de aproximação para esses problemas. Resumidamente, os principais resultados são os seguintes.

Para o *problema de empacotamento em faixa*, apresentamos um algoritmo com limite de desempenho assintótico não maior que 1,62 e outro, *on-line*, cujo limite de desempenho assintótico é 1,75. Ambos para o caso onde rotações são permitidas. Para o *problema de empacotamento em placas*, apresentamos um algoritmo com limite de desempenho assintótico não maior que 2,64 e outro, *on-line*, com limite de desempenho assintótico não maior que 3,25. Ambos também para o caso onde rotações ortogonais são permitidas. Para o *problema de empacotamento tridimensional*, caso orientado, apresentamos um algoritmo com limite de desempenho assintótico não maior que 2,67. Para o caso onde rotações em torno do eixo da altura são permitidas, apresentamos um algoritmo com limite de desempenho assintótico 2,67 e outro, *on-line*, com limite de desempenho assintótico 3,25. Para o *problema de empacotamento em contêineres* onde rotações são permitidas, apresentamos um algoritmo com limite de desempenho assintótico 4,89 e para o caso *on-line*, um algoritmo com limite de desempenho assintótico não maior que 6,25.

Os limites acima ou são novos ou são melhores que os encontrados na literatura. Além disso, apresentamos resultados que relacionam a complexidade dos problemas da versão orientada com a versão em que rotações ortogonais são permitidas. Também apresentamos vários algoritmos de aproximação para casos particulares destes problemas: empacotamento de quadrados, de cubos e de objetos 'pequenos'. Para esses casos, os algoritmos que obtivemos têm limites de desempenho melhores que os acima mencionados.

Os algoritmos que desenvolvemos fazem uso de uma técnica que introduz uma inovação em relação às técnicas até então usadas. Trata-se de uma técnica em que definimos o conceito de *conjuntos críticos* (de objetos) e fazemos uso de combinações adequadas desses conjuntos, procurando garantir um melhor aproveitamento da "área de fundo" ocupada pelos objetos desses conjuntos.

Não descreveremos aqui os algoritmos que desenvolvemos, pois para isso precisaríamos introduzir muitas notações e definições, além de vários outros algoritmos que são usados como subrotinas, impossibilitando mencionar (em poucas páginas) os principais resultados que foram obtidos.

# 1 Preliminares

Nesta seção definimos informalmente todos os problemas que são tratados na tese. Mencionamos a complexidade computacional desses problemas, bem como as medidas padrões usadas para especificar o desempenho dos algoritmos de aproximação.

Além disso, apresentamos resultados referentes às versões desses problemas, nas quais rotações ortogonais podem ser feitas. Mostramos que essas versões, no caso geral, são tão difíceis quanto o caso com orientação fixa.

Nosso espaço de trabalho é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, com o sistema de coordenadas $xyz$. Um item (objeto) $e$ a ser empacotado tem suas dimensões definidas por $x(e)$, $y(e)$ e $z(e)$, onde cada uma dessas dimensões é a medida no correspondente eixo do sistema $xyz$. Para o caso bidimensional alguns destes valores não estão definidos.

## 1.1 Problemas de Empacotamento

Descrevemos aqui apenas os problemas para os quais obtivemos resultados originais.

O **Problema de Empacotamento em Faixa** (*strip packing problem*) consiste em: dados uma lista de retângulos $L = (r_1, \ldots, r_n)$, onde $r_i = (x_i, y_i)$, e um retângulo $R = (a, \infty)$, empacotar os retângulos de $L$ em $R$ minimizando o tamanho do empacotamento na direção ilimitada do recipiente $R$. Consideramos uma versão com orientação fixa e outra onde rotações ortogonais são permitidas. Nesta última versão, cada retângulo $r_i$ pode ser empacotado tratando-o como sendo da forma $r_i = (x_i, y_i)$ ou da forma $(y_i, x_i)$. A versão com orientação fixa será denotada como PEF; e a versão que permite rotação será denotada por PEF$^r$.

O **Problema de Empacotamento em Placas** (*two dimensional bin packing problem*) consiste em: dados uma lista de retângulos $L = (r_1, \ldots, r_n)$, onde $r_i = (x_i, y_i)$, e placas da forma $R = (a, b)$, empacotar os retângulos de $L$ em placas $R$ de forma a usar o menor número destas placas. A versão totalmente orientada será referenciada como PEP, e a versão permitindo rotação, como PEP$^r$.

O **Problema de Empacotamento Tridimensional** (*three-dimensional packing problem*) consiste em: dados uma lista de caixas $L = (b_1, \ldots, b_n)$, onde $b_i = (x_i, y_i, z_i)$, e uma caixa $B = (a, b, \infty)$, empacotar as caixas de $L$ em $B$ minimizando o tamanho do empacotamento na direção ilimitada do recipiente. Consideramos uma versão totalmente orientada (PET) e outra orientada no eixo $z$ (PET$^r$). Na versão totalmente orientada, uma caixa só pode ser empacotada na orientação dada inicialmente. Na versão orientada no eixo $z$, é permitido fazer rotações em torno do eixo $z$. Isto é, uma caixa $b_i = (x_i, y_i, z_i)$ pode ser empacotada tratando-a como sendo da forma $(x_i, y_i, z_i)$ ou da forma $(y_i, x_i, z_i)$.

O **Problema de Empacotamento em Contêineres** (*box packing problem*) consiste em: dados uma lista de caixas $L = (b_1, \ldots, b_n)$, onde $b_i = (x_i, y_i, z_i)$, e caixas $B = (a, b, c)$, empacotar as caixas de $L$ dentro de caixas $B$, usando o menor número destas caixas. Consideramos a versão orientada (PEC), e a versão permitindo rotações (PEC$^r$), em que cada caixa $b_i = (x_i, y_i, z_i)$ pode ser empacotada tratando-a como sendo de uma das formas seguintes: $(x_i, y_i, z_i)$, $(x_i, z_i, y_i)$, $(y_i, x_i, z_i)$, $(y_i, z_i, x_i)$, $(z_i, x_i, y_i)$ e $(z_i, y_i, x_i)$.

Dizemos que um item $e$ tem dimensão *pequena* no eixo $x$ se $x(e) \leq \frac{a}{m}$, para $m \geq 2$ inteiro. Esta mesma definição é usada para os demais eixos. Dizemos que um item é *pequeno* se este tem dimensões pequenas em relação a todos os eixos. O valor de $m$ ficará em aberto, sendo que os algoritmos desenvolvidos para este tipo de instância terão $m$ como um dos parâmetros de especificação do algoritmo.

Dados uma lista de itens $L = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ e um algoritmo $\mathcal{A}$ para empacotar $L$, dizemos que $\mathcal{A}$ é um algoritmo *on-line* se: (1) $\mathcal{A}$ empacota os itens na ordem dada por $L$; (2) $\mathcal{A}$ empacota cada item $e_i$ sem levar em conta qualquer item $e_j$, $j > i$; (3) $\mathcal{A}$ nunca move um item já empacotado.

Os algoritmos de empacotamento que não são *on-line*, são chamados de algoritmos *off-line*.

## 1.2 Medidas de Desempenho dos Algoritmos

Um *algoritmo de aproximação* é um algoritmo cujo tempo de execução é *polinomial* (no tamanho da instância do problema), e que fornece uma garantia de desempenho em relação à solução ótima do problema. São duas as medidas padrões usadas para especificar o desempenho de um algoritmo de aproximação: o limite de desempenho absoluto e o limite de desempenho assintótico. Definimos a seguir esses conceitos. No contexto de empacotamento, consideramos que as dimensões de todos os itens a serem empacotados são limitados por uma constante.

Dada uma lista $L$ de itens a serem empacotados, e um algoritmo $\mathcal{A}$, denotamos por $\mathcal{A}(L)$ a solução gerada pelo algoritmo $\mathcal{A}$ quando aplicada à lista $L$. Tal solução tanto pode ser a altura do empacotamento ou o número de recipientes usados pelo empacotamento, conforme o problema em questão. Denotamos por $\mathrm{OPT}(L)$ o valor correspondente a um empacotamento ótimo de $L$. Apesar de OPT ser usado da mesma forma para problemas distintos, esperamos que seu significado e uso esteja claro pelo contexto.

Dizemos que um algoritmo $\mathcal{A}$ tem *limite de desempenho absoluto* $\alpha$ se $\mathcal{A}(L) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(L)$ para toda lista de entrada $L$. Dizemos que um algoritmo $\mathcal{A}$ tem *limite de desempenho assintótico* $\alpha$ se existe uma constante $\beta$ tal que $\mathcal{A}(L) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(L) + \beta$, para toda lista de entrada $L$.

De acordo com Garey e Johnson (veja página 128 de [14]): "*The asymptotic ratios seem to be the more important ones for bin packing, although for other problems the absolute ratios may be more appropriate*".

## 1.3 Complexidade dos Problemas de Empacotamento

É bem conhecido o fato de que o Problema de Empacotamento Unidimensional (*bin packing problem*) é um problema $\mathcal{NP}$-difícil [14]. Como este problema é um caso particular dos problemas de empacotamento descritos neste artigo, segue que todos esses problemas são também $\mathcal{NP}$-difíceis. Um caso bem mais restrito do problema de empacotamento unidimensional, que já é $\mathcal{NP}$-completo, é decidir se $3k$ itens $s_1, s_2, \ldots, s_{3k}$ onde cada item $s_i$ tem comprimento $\frac{1}{4} < x(s_i) < \frac{1}{2}$, podem ser empacotados em barras de comprimento 1. Este problema é conhecido como Problema da 3-Partição e foi provado ser $\mathcal{NP}$-completo por Garey e Johnson [13]. Um outro caso que é bem restrito e também é $\mathcal{NP}$-completo, é decidir se uma lista $L$ de itens com $x(L) = 2C$ pode ser empacotada em duas barras de comprimento $C$. Este problema é conhecido como *problema da partição* e foi um dos problemas $\mathcal{NP}$-completos apresentados por Karp em 1972 [15]. Note que este último problema mostra que o limite de desempenho absoluto do problema de empacotamento unidimensional deve ser pelo menos $\frac{3}{2}$, a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Caso exista um algoritmo polinomial com limite de desempenho absoluto $\alpha < \frac{3}{2}$, podemos usá-lo para decidir se uma lista $L$, com $x(L) = 2C$ pode ser empacotada em 2 barras de comprimento $C$. Desta forma temos que nenhum dos problemas descritos aqui é aproximável —em termos absolutos— dentro de $\left(\frac{3}{2} - \epsilon\right)$. Outros resultados de não-aproximabilidade são descritos na seção correspondente a cada problema.

## 1.4 Rotações Ortogonais

Vários dos problemas aqui tratados têm versões em que os itens podem sofrer rotações quanto a alguns dos eixos. Consideramos apenas rotações ortogonais (*i.e.*, de 90°). Este tipo de consideração ocorre em muitas aplicações práticas (veja Miyazawa [21]). Na literatura encontramos poucos resultados a respeito dessas versões, no que concerne ao desenvolvimento de algoritmos de aproximação. A maior parte dos resultados relativos a algoritmos de aproximação é referente ao caso com orientação fixa. Em [21], apresentamos vários algoritmos para problemas onde rotações são permitidas.

Coffman, Garey e Johnson fazem em [6] a seguinte consideração a respeito de rotações ortogonais, ao discutir o problema de empacotamento em placas e faixa:

> "*Having introduced the case where ninety degree rotations are allowed, we should mention that some of the worst case results mentioned above also apply to this case, in that the values of $R_A$ and $R_A^\infty$ are unchanged if such rotations are allowed in the construction of optimal packings. This holds true in particular for NFDH and BLDW, since the proofs of the bounds for these algorithms are based on pure area arguments. So far no algorithm has been found that attains improved guarantees by actually using such rotations itself ...*"

Na discussão acima, $R_A$ e $R_A^\infty$ são os limites de desempenho absoluto e assintótico, respectivamente. Em [5], Chung, Garey e Johnson também consideram a possibilidade de se permitir rotações, como mostra o seguinte trecho, a respeito do problema de empacotamento em placas.

> "*4. Directions for further research [...] A second line of attack would be to design and analyse algorithms which could make use of the fact that, in some applications, 90° rotations of rectangles might be allowable. Algorithms which consider the possibility of rotations might well yield improvements. Can one prove worst case bounds that reflect these improvementes ?*"

No contexto acima, "*worst case bounds*" são relativos aos limites de desempenho como definimos. Em [7] Coffman *et al.* também questionam sobre rotações ortogonais.

As considerações acima nos levam a inferir que os autores destes artigos achavam que, ao permitir rotação dos itens, algoritmos com melhores limites de desempenho poderiam ser obtidos. Apesar de esses artigos serem do início da década de 80, desde então pouco foi feito sobre essa variante onde rotações são permitidas.

Uma primeira idéia para resolver os problemas que permitem rotação é adaptar algoritmos do caso orientado para o caso com rotação. Considere PROB um dos problemas descritos anteriormente, para o caso orientado, e PROB$^r$ para o caso com rotação. Dizemos que um item $e$ tem orientação viável se $x(e) \leq a$, $y(e) \leq b$ e $z(e) \leq c$, onde $a$, $b$ e $c$ são as dimensões máximas que um item pode ter nas respectivas dimensões. Uma abordagem natural, é gerar para cada instância $L = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de PROB$^r$, uma nova instância $L'$ de PROB, tal que $L' \in \phi(L) = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, onde

$$d_i = \begin{cases} e_i, & \text{se } e_i \text{ tem orientação viável,} \\ e_i' & \text{caso contrário, onde } e_i' \text{ é uma permutação de } e_i \\ & \text{que tem orientação viável;} \end{cases}$$

e então aplicar um algoritmo de PROB sobre $L'$. Desta maneira, obtemos também um empacotamento para PROB$^r$.

Para cada algoritmo $\mathcal{A}$ para o caso orientado, denote por $\widehat{\mathcal{A}}$ um correspondente algoritmo para PROB$^r$, como descrito acima. Isto é, para toda instância $L$ do PROB$^r$, o algoritmo $\widehat{\mathcal{A}}$ aplica o algoritmo $\mathcal{A}$ sobre uma lista de $\phi(L)$. É fácil ver que este algoritmo $\widehat{\mathcal{A}}$ pode não preservar o limite de desempenho assintótico original de $\mathcal{A}$.

Em [21], exemplificamos este fato para o PEP$^r$. O resultado acima mostra que não existe algoritmo $\widehat{\mathcal{A}}$ para o PEP$^r$, obtido de um algoritmo $\mathcal{A}$ para o PEP —como descrito anteriormente—, que tem um limite de desempenho assintótico menor que 3.

**Proposição 1.1** *Se $\widehat{\mathcal{A}}$ é um algoritmo para* PEP$^r$ *obtido de um algoritmo $\mathcal{A}$ para o* PEP*, como descrito acima, então o limite de desempenho assintótico de $\widehat{\mathcal{A}}$ é pelo menos 3.*

Este resultado mostra que, se usarmos "de uma maneira ingênua" (como descrevemos acima) um algoritmo $\mathcal{A}$ do problema orientado para resolver problemas permitindo rotações, podemos ter um algoritmo com desempenho pobre para este último problema, mesmo que o algoritmo tenha um bom limite de desempenho no caso orientado.

Em [21, 25] mostramos que, pelo menos para os casos gerais, as versões dos problemas considerados permitindo rotações ortogonais são tão difíceis (com respeito à aproximabilidde) quanto o caso orientado, ao contrário do que sugere as citações acima. Por outro lado, se $\mathcal{A}^r$ é um algoritmo para um dos problemas permitindo rotações, então este algoritmo pode ser usado por um outro algoritmo $\mathcal{A}'$, para o problema equivalente totalmente orientado, de forma a manter o mesmo limite de desempenho. Mais especificamente, mostramos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2** *Seja* PROB$^r$ *um dos problemas definidos anteriormente, $\alpha$ e $\beta$ constantes, e $\mathcal{A}^r$ um algoritmo considerando rotações de $90°$ em torno de algum dos eixos $x$ ou $y$ ou $z$ (podendo ser em vários eixos) tal que,*

$$\mathcal{A}^r(L) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(L) + \beta \quad \textit{para toda instância } L \textit{ de } \mathrm{PROB}^r.$$

*Então, podemos adaptar este algoritmo para um algoritmo $\mathcal{A}$ para a variante de* PROB$^r$*, chamado de* PROB*, onde fixamos a orientação dos itens sobre alguns dos eixos, de tal modo que a seguinte relação é válida para esta variante:*

$$\mathcal{A}(L) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(L) + \beta \quad \textit{para toda instância } L \textit{ de } \mathrm{PROB}.$$

*Mais ainda, este resultado também é válido para algoritmos on-line.*

Ainda que as versões dos problemas de empacotamento considerando rotações ortogonais sejam tão difíceis quanto suas respectivas versões orientadas, isto não quer dizer que esta dificuldade sempre vá ocorrer. Há casos especiais do problema, definido para instâncias especiais, onde é possível tirar proveito das rotações ortogonais. Isto foi verificado em algoritmos para casos especiais do problema de empacotamento em placas e o problema de empacotamento tridimensional, onde rotações ortogonais nos permitiram obter um melhor limite de desempenho assintótico.

O que nos parece também é que, ao permitir rotações ortogonais, a análise do desempenho dos algoritmos fica mais complicada. Vale notar que certos casos especiais são extremamente fáceis se considerados na versão totalmente orientada, mas ficam complicadas na versão onde rotações ortogonais são permitidas. Um exemplo disso é o problema de carregamento de paletes (*pallet loading*) no caso em que a lista de entrada só contém retângulos de mesmo tamanho (e o objetivo é empacotar o maior número deles num único retângulo). Algumas pesquisas têm sido conduzidas sobre este problema [11, 28], mas não é conhecida nenhuma prova de que este problema é realmente $\mathcal{NP}$-difícil.

# 2 Problema de Empacotamento em Faixa

O Problema de Empacotamento em Faixa (PEF) foi primeiramente proposto por Baker, Coffman e Rivest [2] em 1980. Uma aplicação interessante deste problema ocorre em projetos de escalonamento de processos em um computador. Neste tipo de aplicação, o número de itens a serem empacotados é em geral grande, sendo que existe uma necessidade de algoritmos rápidos e com boa performance, muitas vezes *on-line*.

Em 1980, Coffman, Garey, Johnson e Tarjan [7], desenvolveram os algoritmos chamados $\mathrm{NFDH}^{(f)}$ (*Next Fit Decreasing Height*) e $\mathrm{FFDH}^{(f)}$ (*First Fit Decreasing Height*), e provaram que o primeiro tem limite de desempenho assintótico 2 e o segundo tem limite de desempenho assintótico 1,7. Quando consideramos instâncias com características especiais o Algoritmo $\mathrm{FFDH}^{(f)}$ apresenta melhor desempenho assintótico. Se todos os itens a serem empacotados são quadrados, esses autores mostraram que o Algoritmo $\mathrm{FFDH}^{(f)}$ tem limite de desempenho assintótico 1,5. Já no caso em que todos os retângulos de $L$ não têm largura maior que $\frac{1}{m}$ da largura da faixa, provaram que o Algoritmo $\mathrm{FFDH}^{(f)}$ tem limite de desempenho assintótico $\frac{m+1}{m}$. Nesse mesmo artigo, esses autores apresentam um algoritmo com limite de desempenho assintótico $\frac{m+2}{m+1}$, sendo este o de melhor limite conhecido para o caso onde os itens têm largura pequena.

Para instâncias quaisquer, o algoritmo com melhor limite de desempenho assintótico conhecido é devido a Baker, Brown e Katseff [1]. Este algoritmo é chamado de UD *(Up and Down)* e tem limite de desempenho assintótico $\frac{5}{4}$.

No caso de algoritmos *on-line*, Csirik e Woeginger [10] apresentam um algoritmo que gera empacotamentos divididos em níveis, com limite de desempenho assintótico que pode se tornar tão próximo de 1,691 quanto se queira. Eles mostram também que o limite inferior para o limite de desempenho assintótico de um algoritmo *on-line* para o PEF, que gera o empacotamento dividido em níveis, deve ser pelo menos 1,691. Em [4], Brown, Baker e Katseff mostraram que o limite de desempenho absoluto de qualquer algoritmo *on-line* para o PEF não pode ser menor do que 2. Recentemente, Schiermeyer [27] e Steinberg [29] apresentaram algoritmos *off-line* com limite de desempenho absoluto 2 para o PEF.

Desenvolvemos dois algoritmos para o PEF$^r$ (problema de empacotamento em faixa, com rotação): o algoritmo SPR e o algoritmo OSPR, este último *on line*. A respeito desses algoritmos temos os seguintes resultados.

**Teorema 2.1** *Para toda lista de entrada $L$ para o* PEF$^r$*, onde os retângulos de $L$ têm dimensões menores ou iguais a $Z$, temos que* $\mathrm{SPR}(L) \leq 1{,}613 \cdot \mathrm{OPT}(L) + 6Z$.

**Teorema 2.2** *Para toda lista de entrada $L$ para o* PEF$^r$*, onde os retângulos de $L$ têm dimensões menores ou iguais a $Z$, temos que* $\mathrm{OSPR}_p(L) \leq \alpha_p \cdot \mathrm{OPT}(L) + \frac{2Z}{1-p}$, *onde* $\lim_{p\to 1} \alpha_p \leq 1{,}75$.

Apresentamos também um algoritmo *on-line*, $\mathrm{IOSSP}_{m,p}$ para o PEF especializado para o empacotamento de itens pequenos, e algoritmos *off-line* e *on-line* para o PEF$^r$ especializado para o empacotamento de itens pequenos, denominados de $\mathrm{SSP}_m$ e $\mathrm{OSSP}_{\mathrm{m,p}}$, respectivamente.

Na Tabela 1 apresentamos os algoritmos com os melhores limites de desempenho conhecidos para o PEF e PEF$^r$. Nesta tabela (bem como nas demais), os algoritmos que desenvolvemos em [21] estão indicados com $\star$ na coluna Ref (referência).

| **Algoritmo** | **Probl.** | **Tipo** | $\alpha$ | $\beta$ | **Ref.** | **Condição** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M,S | PEF | *off-line* | 2 | —— | [27, 29] | CG |
| UD | PEF | *off-line* | 1,25 | $\frac{53}{8}Z$ | [1] | CG |
| SF | PEF | *off-line* | $\frac{m+2}{m+1}$ | $2Z$ | [7] | IP |
| $\mathrm{IOSSP}_{m,p}$ | PEF | *on-line* | $\asymp \frac{m+2}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2}$ | $\frac{4Z}{1-p}$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{Shelf}(H_M, p)$ | PEF | *on-line* | $\asymp 1{,}691$ | $\frac{M}{1-p}$ | [10] | CG |
| $\mathrm{SSP}_m$ | PEF$^r$ | *off-line* | $\frac{m+1}{m}$ | $2Z$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{OSSP}_{m,p}$ | PEF$^r$ | *on-line* | $\asymp \frac{m+1}{m}$ | $\frac{2Z}{1-p}$ | $\star$ | IP |
| SPR | PEF$^r$ | *off-line* | 1,613 | $4Z$ | $\star$ | CG |
| OSPR | PEF$^r$ | *on-line* | $\asymp 1{,}75$ | $\frac{2Z}{1-p}$ | $\star$ | CG |

**Tabela 1.** As siglas usadas na última coluna significam: CG = Caso Geral, IP = Itens Pequenos.

# 3 Problema de Empacotamento em Placas

Em 1982 foi apresentado o primeiro algoritmo com estudo de limite de desempenho assintótico para o Problema de Empacotamento em Placas, PEP, com orientação fixa. Este algoritmo, devido a Chung, Garey e Johnson [5], tem limite de desempenho assintótico não maior que 2,125, sendo este o de melhor limite conhecido até o momento.

Para o caso *on-line*, o primeiro algoritmo de aproximação que foi desenvolvido para o mesmo problema é devido a Coppersmith e Raghavan [8], com limite de desempenho assintótico não maior que 3,25. Os algoritmos cujos limites de desempenho assintótico são os melhores que se conhecem são devidos a Li e Cheng [16] e Csirik e van Vliet [9], ambos com limite de desempenho assintótico igual a 2,86.

Por outro lado, Blitz, van Vliet e Woeginger [3] mostraram que qualquer algoritmo *on-line* para o PEP deve ter um limite de desempenho assintótico de pelo menos 1,907.

Em [21], apresentamos uma demonstração simples de que este problema não pode ter limite de desempenho absoluto menor que 2, a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

**Teorema 3.1** *O problema de empacotamento em placas* (PEP) *não é aproximável dentro de* $2 - \epsilon$*, para qualquer* $\epsilon > 0$*, a menos que* $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$*. Este resultado é válido mesmo que todos os itens de entrada sejam quadrados.*

Quando permitimos rotações ortogonais, ou seja, no caso do PEP$^r$, descrevemos um algoritmo chamado BI cujo limite de desempenho assintótico pode chegar tão próximo de 2,6397 quanto se queira. Para o caso *on-line*, apresentamos um algoritmo chamado OBI, com limite de desempenho assintótico 3,25. Os resultados a respeito desses algoritmos são os seguintes.

**Teorema 3.2** *Para qualquer instância* $L$ *do* PEP$^r$*, temos que* $\mathrm{BI}_{k,\epsilon}(L) \leq \alpha_{k,\epsilon} \cdot \mathrm{OPT}(L) + \mathcal{O}\left(k + \frac{1}{\epsilon}\right)$*, onde* $\alpha_{k,\epsilon} \to 2{,}6397$ *à medida que* $k \to \infty$ *e* $\epsilon \to 0$*.*

**Teorema 3.3** *Para qualquer instância* $L$ *do* PEP$^r$*, temos que* $\mathrm{OBI}(L) \leq 3{,}25 \cdot \mathrm{OPT}(L) + 10$*.*

Também descrevemos algoritmos *on-line* e *off-line* para o PEP$^r$ especializado para o caso de itens de dimensões pequenas, com limite de desempenho próximo de $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$; e apresentamos algoritmos para o caso em que a instância é restrita a quadrados.

Além disso, desenvolvemos um algoritmo [21, 26], STP$_m$, com melhor limite que o do Algoritmo HNF (*Hybrid Next Fit*), apresentado por Frenk e Galambos [12], para o PEP especializado para itens pequenos.

**Teorema 3.4** *Para qualquer lista* $L$ *de retângulos, com dimensões menores ou iguais a* $\frac{1}{m}$*,* $\mathrm{STP}_m(L) \leq \alpha_m \cdot \mathrm{OPT}(L) + \mathcal{O}(m)$*, onde* $\alpha_m = (2m^3 + 5m^2 + 5m + 2 + \sqrt{9m^4 + 34m^3 + 41m^2 + 20m + 4})/(2m(m+1)^2)$*.*

Na seguinte tabela apresentamos os valores de $\alpha_m = \alpha(\mathrm{STP}_m)$ e $\alpha(\mathrm{HNF})$ para valores de $m$ entre 1 e 7.

| $m$ | $\alpha(\mathrm{STP}_m)$ | $\alpha(\mathrm{HNF})$ |
|---|---|---|
| 1 | 3,04903810... | 3,38206041... |
| 2 | 2,02722200... | 2,84623550... |
| 3 | 1,68340642... | 1,95357991... |
| 4 | 1,51124783... | 1,64587967... |
| 5 | 1,40805542... | 1,48878775... |
| 6 | 1,33937902... | 1,39323320... |
| 7 | 1,29041589... | 1,32892571... |

No caso especial em que as placas são quadradas apresentamos um algoritmo *on-line*, chamado RR, sobre o qual provamos o seguinte resultado.

**Teorema 3.5** *Seja $L$ uma instância para o* $\mathrm{PEP}^r$*, com placas quadradas. Então* $\mathrm{RR}_k(L) \leq \alpha_k \cdot \mathrm{OPT}(L) + k + 14$*, onde* $\alpha_k \to 2{,}6875$ *à medida que $k$ se torna grande.*

Observamos que o resultado acima ilustra um caso em que, ao permitir rotações, obtivemos um algoritmo com melhor limite de desempenho assintótico (do que no caso orientado). O algoritmo RR é definido para diferentes valores de $k$: denotamos por $\mathrm{RR}_k$ o correspondente algoritmo. O valor de $k$ está associado a subdvisões de certas listas de objetos. Notamos porém que, mesmo para $k$ relativamente pequeno, por exemplo, igual a 13, temos que $\alpha_k \leq 2,6876$. Ou seja, podemos afirmar que $\mathrm{RR}_{13} \leq 2.6876 \cdot \mathrm{OPT}(L) + 27$. Essa mesma observação vale para os algoritmos *off-line* que dependem de um parâmetro $k$, que serão mencionados a seguir. Em todos eles, para valores pequenos de $k$, o valor de $\alpha_k$ está bem próximo do valor especificado para o caso em que $k \to \infty$.

Na Tabela 2 indicamos os algoritmos para o PEP e $\mathrm{PEP}^r$ que têm os melhores limites de desempenho conhecidos.

# 4 Problema de Empacotamento Tridimensional

Li e Cheng [17] foram os primeiros a estudar o Problema de Empacotamento Tridimensional (PET) sob a ótica de algoritmos de aproximação. Em 1990, esses autores apresentaram vários algoritmos para o PET: para o caso geral, um algoritmo com limite de desempenho assintótico 3,25; e para o caso especial onde todas as caixas têm fundo quadrado, um algoritmo com limite de desempenho assintótico 2,6875. Em [19] eles melhoraram o limite do caso geral apresentando um algoritmo *on-line* com limite de desempenho que pode se tornar tão próximo de 2,89 quanto se queira.

Em [21, 24], apresentamos um algoritmo, chamado TRI que melhora este limite para menos que 2,67.

| **Algorit.** | **Prob.** | **Tipo** | $\alpha$ | $\beta$ | **Ref.** | **Condição** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| HFF | PEP | *off-line* | 2,125 | 5 | [5] | CG |
| $\mathrm{STP}_m$ | PEP | *off-line* | $\alpha(\mathrm{STP}_m)$ | $\mathcal{O}(m)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{IOFF}_m$ | PEP | *on-line* | $\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2 + \frac{2}{m(m+1)}$ | $\mathcal{O}(m^2)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{FF}^{(2)}$ | PEP | *on-line* | $\asymp 2{,}86$ | $\mathcal{O}\left(\frac{1}{1-r}\frac{1}{1-s}\right)$ | [16, 9] | CG |
| $\mathrm{SS}_m$ | PEP | *off-line* | $\alpha(\mathrm{SS}_m)$ | $4Z$ | $\star$ | QPQ |
| $\mathrm{BI}_m$ | $\mathrm{PEP}^r$ | *off-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ | 6 | $\star$ | IP |
| $\mathrm{OFF}_m^{(2)}$ | $\mathrm{PEP}^r$ | *on-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ | $\mathcal{O}(m^2)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{BI}_{k,\epsilon}$ | $\mathrm{PEP}^r$ | *off-line* | $\asymp 2{,}6397$ | $\mathcal{O}\left(k+\frac{1}{\epsilon}\right)$ | $\star$ | CG |
| $\mathrm{RR}_k$ | $\mathrm{PEP}^r$ | *on-line* | $\asymp 2{,}6875$ | $\mathcal{O}(k)$ | $\star$ | PQ |
| OBI | $\mathrm{PEP}^r$ | *on-line* | 3,25 | 10 | $\star$ | CG |

**Tabela 2.** As siglas usadas na última coluna significam: CG = Caso Geral, IP = Itens Pequenos, QPQ = empacotamento de Quadrados Pequenos em Quadrados, e PQ = empacotamento em Placas Quadradas.

**Teorema 4.1** *Para qualquer instância $L$ do* PET, *temos* $\mathrm{TRI}_k(L) \leq \alpha_k \cdot \mathrm{OPT}(L) + \left(2k + \frac{597}{8}\right) Z$, *onde* $\alpha_k \to 2{,}6608$ *à medida que* $k \to \infty$.

Este resultado responde a uma questão levantada por Li e Cheng [19], sobre a existência de um algoritmo polinomial com limite de desempenho assintótico menor que 2,89.

Desenvolvemos também algoritmos particulares para casos especiais deste problema. Para o caso em que as caixas de $L$ têm fundo quadrado apresentamos um algoritmo chamado LS com limite de desempenho assintótico não maior que 2,543.

Para o caso especial onde a caixa $B$ e todas as caixas de $L$ têm fundo quadrado, desenvolvemos um algoritmo chamado SS que melhora o limite anterior de 2,6875, devido a Li e Cheng, para menos que 2,361.

**Teorema 4.2** *Para qualquer lista $L$ para o* PET, *onde todas as caixas têm fundo quadrado,* $\mathrm{SS}_1^{(t)}(L) \leq 2{,}3605 \cdot \mathrm{OPT}(L) + 4Z$.

Os primeiros a desenvolver algoritmos de aproximação para a versão em que as caixas de $L$ podem sofrer rotações em torno do eixo $z$ foram Li e Cheng [18]. Esses autores apresentaram um algoritmo com um limite de desempenho assintótico 4,572. Em [21, 22] melhoramos este limite, apresentando um algoritmo chamado R, adaptando o algoritmo que desenvolvemos para o caso orientado e mantendo o mesmo limite de desempenho assintótico.

**Teorema 4.3** *Para qualquer instância $L$ do* $\mathrm{PET}^r$, *temos que* $\mathrm{R}_k(L) \leq \alpha_k \cdot \mathrm{OPT}(L) + \left(2k + \frac{597}{8}\right) Z$, *onde* $\alpha_k \to 2{,}6608$ *à medida que* $k \to \infty$.

Descrevemos também um algoritmo, chamado BS, para o caso especial em que a caixa $B$ tem fundo quadrado e mostramos que seu limite de desempenho assintótico é menor que 2,528. Para o caso *on-line* apresentamos um algoritmo com um limite de desempenho assintótico que pode se tornar tão próximo de 3,25 quanto se queira. Também apresentamos um outro algoritmo —chamado RR— para o caso especial onde a caixa $B$ tem fundo quadrado, com um limite de desempenho assintótico que pode se tornar tão próximo de 2,6875 quanto se queira. O caso especial em que as caixas têm fundo de dimensões pequenas também foi investigado. Esses resultados estão reunidos na Tabela 3, onde indicamos os algoritmos com os melhores limites de desempenho conhecidos até o momento.

| **Algorit.** | **Prob.** | **Tipo** | $\alpha$ | $\beta$ | **Ref.** | **Condição** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{TRI}_k$ | PET | *off-line* | $\asymp 2{,}6608$ | $\left(2k+\frac{597}{8}\right)Z$ | $\star$ | CG |
| LS | PET | *off-line* | 2,5425 | $\frac{101}{8}Z$ | $\star$ | LQ |
| $\mathrm{STP}_m^{(t)}$ | PET | *off-line* | $\alpha(\mathrm{STP}_m^{(t)})$ | $\mathcal{O}(m\cdot Z)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{FFLS}_{r,s}$ | PET | *on-line* | $\asymp 2{,}89$ | $\mathcal{O}\left(\frac{1}{1-r}\frac{1}{1-s}\right)Z$ | [19] | CG |
| $\mathrm{ISRR}_{m,p}$ | PET | *on-line* | $\asymp\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2+\frac{2}{m(m+1)}$ | $\mathcal{O}\left(\frac{m^2}{1-p}\right)Z$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{SS}_1^{(t)}$ | PET | *off-line* | 2,3606 | $4Z$ | $\star$ | QQ |
| $\mathrm{SS}_m^{(t)}$ | PET | *off-line* | $\alpha(\mathrm{SS}_m^{(t)})$ | $4Z$ | $\star$ | QP |
| $\mathrm{BI}_m^{(t)}$ | $\mathrm{PET}^r$ | *off-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ | $6Z$ | [20] | IP |
| $\mathrm{SRR}_{m,p}^{(3)}$ | $\mathrm{PET}^r$ | *on-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ | $\mathcal{O}\left(\frac{m^2}{1-p}\right)Z$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{R}_k$ | $\mathrm{PET}^r$ | *off-line* | $\asymp 2{,}6608$ | $\left(2k+\frac{597}{8}\right)Z$ | $\star$ | CG |
| BS | $\mathrm{PET}^r$ | *off-line* | 2,5274 | $15Z$ | $\star$ | BQ |
| $\mathrm{RR}_{k,p}^{(3)}$ | $\mathrm{PET}^r$ | *on-line* | $\asymp 2{,}6875$ | $\mathcal{O}\left(\frac{k}{1-r}\right)Z$ | $\star$ | BQ |
| $\mathrm{OTRI}_p$ | $\mathrm{PET}^r$ | *on-line* | $\asymp 3{,}25$ | $\mathcal{O}\left(\frac{10}{1-p}\right)Z$ | $\star$ | CG |

**Tabela 3.** As siglas usadas na última coluna significam: CG = Caso Geral, IP = Itens Pequenos, LQ = caixas de $L$ têm fundo Quadrado, QQ = todas as caixas têm fundo Quadrado, QP = todas as caixas têm fundo Quadrado e Pequeno, e BQ = caixa $B$ tem fundo Quadrado.

# 5 Problema de Empacotamento em Contêineres

Os primeiros a apresentar um algoritmo de aproximação para Problema de Empacotamento em Contêineres (PEC) foram Coppersmith e Raghavan [8], que desenvolveram um algoritmo com limite de desempenho assintótico 6,25. Para esta mesma versão totalmente orientada, Li e Cheng [16] apresentaram um algoritmo com um limite de desempenho assintótico que pode se tornar tão próximo de 4,84 quanto se queira. Este mesmo limite é também atingido por um outro algoritmo desenvolvido por Csirik e van Vliet [9]. Esses dois últimos algoritmos são *on-line* e o limite de desempenho assintótico é o melhor conhecido para este problema.

Blitz, van Vliet e Woeginger [3] mostraram que algoritmos *on-line* para o PEC ($\mathrm{PEC}^r$) não podem ter limite de desempenho assintótico menor que 2,111.

Em [21], apresentamos um algoritmo —chamado BOX— para o caso geral do $\mathrm{PEC}^r$ com limite de desempenho assintótico não maior que 4,883.

**Teorema 5.1** *Para toda instância $L$ do $\mathrm{PET}^r$, temos $\mathrm{BOX}(L) \leq \alpha_{k,\epsilon} \cdot \mathrm{OPT}(L) + \beta_{k,\epsilon}$, onde $\alpha_{k,\epsilon} \to 4{,}8821\ldots$ a medida que $k \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ e $\beta_{k,\epsilon}$ é constante para valores constantes de $k$ e $\epsilon$.*

Para o caso especial de empacotamentos de cubos em cubos apresentamos um algoritmo —chamado CUBO— com limite de desempenho não maior que 3,467. Este caso é independente de rotações, já que todos as caixas são cubos. Note que este limite é bem melhor que o melhor limite do caso geral do PEC, de 4,84.

**Teorema 5.2** *Para toda lista de cubos $L$, vale a seguinte desigualdade para o empacotamento de $L$ em cubos, $\mathrm{CUBO}_1(L) \leq 3{,}466 \cdot \mathrm{OPT}(L) + 4$.*

Os resultados a respeito dos algoritmos que desenvolvemos e seus limites de desempenho estão resumidos na Tabela 4. Nesta tabela mencionamos os algoritmos com os melhores limites de desempenho assintótico conhecidos para este problema.

| **Algorit.** | **Prob.** | **Tipo** | $\alpha$ | $\beta$ | **Ref.** | **Condição** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LC/CV | PEC | *on-line* | $\asymp 4{,}84$ | $\mathcal{O}\left(\frac{1}{1-r}\frac{1}{1-s}\right)$ | [16, 9] | CG |
| $\mathrm{SCP}_m$ | PEC | *off-line* | $\alpha(\mathrm{SCP}_m)$ | $\mathcal{O}(m^3)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{IOFF}_m^{(3)}$ | PEC | *on-line* | $\frac{m^4+5m^3+10m^2+7m+2}{m^2(m+1)^2}$ | $\mathcal{O}(m^4)$ | $\star$ | LP |
| $\mathrm{CUBO}_1$ | PEC | *off-line* | 3,4654 | 4 | $\star$ | QQ |
| $\mathrm{CUBO}_m$ | PEC | *off-line* | $\alpha(\mathrm{CUBO}_m)$ | $\mathcal{O}(m)$ | $\star$ | LQP |
| $\mathrm{H3D}_m$ | $\mathrm{PEC}^r$ | *off-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$ | 11 | $\star$ | IP |
| $\mathrm{OFF}_m^{(3)}$ | $\mathrm{PEC}^r$ | *on-line* | $\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$ | $\mathcal{O}(m^4)$ | $\star$ | IP |
| $\mathrm{BOX}_{k,\epsilon}$ | $\mathrm{PEC}^r$ | *off-line* | $\asymp 4{,}883$ | $\mathcal{O}\left(\frac{k}{\epsilon}\right)$ | $\star$ | CG |
| OBOX | $\mathrm{PEC}^r$ | *on-line* | 6,25 | $\mathcal{O}(1)$ | $\star$ | CG |

**Tabela 4.** As siglas usadas na última coluna significam: CG = Caso Geral, IP = Itens Pequenos, LP = caixas de $L$ com dimensões Pequenas, QQ = todas as caixas são Cubos e LQP = caixas de $L$ são Cubos Pequenos, $m \geq 2$.

# 6 Comentários Finais

Em [21] apresentamos vários algoritmos de aproximação para problemas de empacotamento, muitos dos quais com limites de desempenho melhores que os conhecidos anteriormente. Desenvolvemos também vários algoritmos para problemas não tratados na literatura sob essa abordagem.

A importância dos resultados em [21] não se restringem apenas aos algoritmos de aproximação desenvolvidos e sua análise de desempenho. Ressaltamos a importância de uma das técnicas que introduzimos —a respeito de conjuntos críticos— que permitiu obter os resultados mencionados, e que pode eventualmente ser usada em outros algoritmos de empacotamento.

Observamos também que os problemas de empacotamento envolvendo rotações ortogonais, apesar de terem sido questionados desde o início da década de 80, não foram amplamente pesquisados. A tese que desenvolvemos faz um tratamento mais amplo desse problema, apresentando algoritmos de aproximação e fazendo um estudo comparativo dessa versão com relação ao caso orientado (em termos de complexidade e aproximabilidade).

Quanto à técnica de combinar conjuntos críticos, que introduzimos, esperamos que seu uso seja refinado e usado tanto para melhorar os resultados já obtidos, quanto para obter resultados a respeito de outros problemas de empacotamento.

# Referências


[1] B. S. Baker, D. J. Brown, and H. P. Katseff, *A $\frac{5}{4}$ algorithm for two-dimensional packing*, J. of Algorithms, 2 (1981), pp. 348–368.

[2] B. S. Baker, E. G. Coffman Jr., and R. L. Rivest, *Orthogonal packings in two-dimensions*, SIAM J. on Computing, 9 (1980), pp. 846–855.

[3] D. Blitz, A. van Vliet, and G. J. Woeginger, *Lower bounds on the asymptotic worst-case ratio of online bin packing algorithms*, Unpublished manuscript (1996).

[4] D. J. Brown, B. S. Baker, and H. P. Katseff, *Lower bounds for the on-line two dimensional packing algorithms*, Acta Informatica, 18 (1982), pp. 207–225.

[5] F. R. K. Chung, M. R. Garey, and D. S. Johnson, *On packing two-dimensional bins*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 3 (1982), pp. 66–76.

[6] S E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, and D. S. Johnson, *Approximation algorithms for bin packing - an updated survey*, in Algorithms design for computer system design, G. Ausiello, M. Lucertini, and P. Serafini, eds., Springer-Verlag, New York, 1984, pp. 49–106.

[7] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan, *Performance bounds for level oriented two-dimensional packing algorithms*, SIAM J. Computing, 9 (1980), pp. 808–826.

[8] D. Coppersmith and P. Raghavan, *Multidimensional on-line bin packing: algorithms and worst-case analysis*, Oper. Res. Lett., 8 (1989), pp. 17–20.

[9] J. Csirik and A. van Vliet, *An on-line algorithm for multidimensional bin packing*, Operations Research Letters, 13 (1993), pp. 149–158.

[10] J. Csirik and G. J. Woeginger, *Shelf algorithms for on-line strip packing*, Optimierung und Kontrolle. Bericht Nr. 79, Karl-Franzens-Universität Graz & Technische Universität Graz, Juli 1996.

[11] K. A. Dowsland, *Efficient automated pallet loading*, European J. Operational Research, 44 (1990), pp. 232–238.

[12] J. B. Frenk and G. Galambos, *Hybrid next fit algorithm for the two-dimensional rectangle bin packing problem*, Computing, 39 (1987), pp. 201–217.

[13] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints*, SIAM J. Computing, 4 (1975), pp. 397–411.

[14] ——, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.

[15] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in Complexity of Computer Computations, R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds., New York, 1972, Plenum Press, pp. 85–103.

[16] K. Li and K.-H. Cheng, *A generalized harmonic algorithm for on-line multidimensional bin packing*, TR UH-CS-90-2, University of Houston, January 1990.

[17] ——, *On three-dimensional packing*, SIAM J. on Computing, 19 (1990), pp. 847–867.

[18] ——, *Static job scheduling in partitionable mesh connected systems*, J. Parallel and Distributed Computing, 10 (1990), pp. 152–159.

[19] ——, *Heuristic algorithms for on-line packing in three dimensions*, J. of Algorithms, 13 (1992), pp. 589–605.

[20] F. K. Miyazawa, *Algoritmos de Empacotamento Tridimensional: novas estratégias e análises de desempenho*, dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo IME-USP, São Paulo-SP Brasil, dezembro 1993.

[21] ——, *Algoritmos de Aproximação para Problemas de Empacotamento*, tese de doutorado, Universidade de São Paulo IME-USP, São Paulo, Brasil, novembro 1997.

[22] F. K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, *Approximation algorithms for the orthogonal $z$-oriented 3-D packing problem.* Aceito no SIAM J. on Computing.

[23] ———, *Three-dimensional packing algorithms with asymptotic performance analysis (abstract)*, in Proceedings of the XV International Symposium on Mathematical Programming, Ann Arbor – Michigan – EUA, 1994, pp. 213.

[24] ———, *An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis*, Algorithmica, 18 (1997), pp. 122–144.

[25] ———, *Approximation algorithms for packing problems with orthogonal rotations (abstract)*, in Proceedings of the XVI International Symposium on Mathematical Programming, Lausanne–Switzerland, 1997.

[26] ———, *Approximation algorithms for packing small items*, in XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (Mini Simpósio de Corte e Empacotamento), 1997.

[27] I. Schiermeyer, *Reverse-fit: A 2-Optimal algorithm for packing rectangles*, Lecture Notes in Computer Science, 855 (1994).

[28] Smith, A. and De Cani, P., *An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets*, Journal of Operational Research, 31 (1980), pp. 573–578.

[29] A. Steinberg, *A strip-packing algorithm with absolute performance bound 2*, SIAM J. on Computing, 26 (1997), pp. 401–409.