Processamento de Imagens usando Grafos

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Segundo semestre de 2004

Após a segmentação, os objetos podem ser representados de diversas formas bem como suas características de forma, cor, e textura. Técnicas de registro de imagens, classificação de padrões, e compressão de informação são exemplos de aplicações para essas representações. Vamos considerar, por exemplo, uma imagem binária $\hat{I} = (D_I, I)$, onde $I(p) = 1$ se p pertence ao objeto, e $I(p) = 0$ no caso contrário.

1 Métrica

Várias medidas e representações são baseadas em métricas. Uma função δ de distância entre pixels $p, q \in D_I$ é uma **métrica** se:

$$
\begin{aligned}
\delta(p,q) &\geq 0 \ (\delta(p,q) = 0, \text{ se } p = q), && (1)\\
\delta(p,q) &= \delta(q,p), && (2)\\
\delta(p,r) &\leq \delta(p,q) + \delta(q,r), && (3)
\end{aligned}
$$

onde $p = (x_p, y_p)$, $q = (x_q, y_q)$, e $r = (x_r, y_r)$ são três pixels da imagem. As métricas mais usadas são:

- Euclideana: $\delta(p,q) = ((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2)^{1/2}$,
- City-block: $\delta(p,q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$,
- Chessboard: $\delta(p,q) = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$.
- Chamfer: $\delta_{a,b}(p,q) = a * \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\} + (b - a) * \min\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$, onde a, b são constantes (e.g. $a = 5$ e $b = 7$).

A métrica de Chamfer é uma aproximação da métrica Euclideana e é muito utilizada em várias aplicações, por uma questão de eficiência.

2 Caminho geodésico

A forma de um objeto pode ser caracterizada por diversas medidas de distância. Imagine, por exemplo, que selecionamos os dois pixels mais distantes no contorno de um objeto e que desejamos medir o comprimento do caminho mais curto entre eles passando por dentro do objeto apenas. Este caminho é denominado **geodésico**. Outra aplicação para o caminho geodésico seria o cálculo de rotas permitidas para um robô em um dado ambiente conhecido. Poderíamos também selecionar um ou mais pontos característicos (*land marks*) em um objeto e calcular uma **transformada de distância geodésica**. Neste caso, estamos interessados na representação que será obtida pelo comprimento de todos os caminhos mais curtos entre cada pixel do objeto e o conjunto de pontos dado.

A IFT se aplica ao cálculo de caminhos geodésicos usando uma variação simples da função de custos f_{sum}, com política FIFO, adjacência A do tipo 8-conexa, e peso de arco $\delta(p,q)$, para todo $(p,q) \in A$, dado por uma das métricas acima, **exceto a Euclideana**.

$$\begin{aligned} f_{geo}(\langle q \rangle) &= \begin{cases} 0, & \text{se } q \in S \\ +\infty, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \\ f_{geo}(\pi \cdot \langle p,q \rangle) &= \begin{cases} f_{geo}(\pi) + \delta(p,q), & \text{se } I(q) = 1, \\ +\infty, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Onde S é um conjunto de pixels sementes no objeto (i.e. se $q \in S$, então $I(q) = 1$). Na transformada de distância geodésica estamos interessados na imagem de custos $\hat{C} = (D_I, C)$. Mais especificamente, nos custos obtidos para pixels do objeto. Outro caso é quando estamos interessados no caminho geodésico de S a um outro conjunto D de pixels destino dentro do objeto. Neste caso, nós calculamos uma IFT com f_{sum} e métrica chamfer, por exemplo, e interrompemos o processo quando o primeiro pixel $p \in D$ sair da fila Q. O caminho procurado é $P^*(p)$ obtido da imagem de predecessores e seu comprimento é o custo $C(p)$.

3 Transformada de Distância

Considere como sementes em S os pixels da borda de um objeto (i.e. pixels do objeto que possuem a menos um vizinho-4 no fundo). Muitas aplicações requerem o cálculo da **distância mínima** entre pixels do objeto e/ou fundo e o conjunto S. Este mapa de distâncias pode ser obtido, por exemplo, na imagem de custos $\hat{C} = (D_I, C)$ de uma IFT com política FIFO e função de custos f^S_{euc} :

$$\begin{aligned} f^S_{euc}(\langle q \rangle) &= \begin{cases} 0, & \text{se } q \in S \\ +\infty, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \\ f^S_{euc}(\pi \cdot \langle p,q \rangle) &= (x_{org(\pi)} - x_q)^2 + (y_{org(\pi)} - y_q)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

onde $org(\pi)$ é o pixel inicial do caminho ótimo π. Neste caso, os caminhos ótimos não estão restritos ao domínio do objeto/fundo. Esta transformada de distância é dita **Euclideana** sempre que a escolha da relação de adjacência A for suficiente para que todos os pixels da imagem sejam alcançados pelo pixel semente mais próximo. Caso contrário, a função f_{euc}^{S} não é suave. Na prática, porém, a adjacência-8 é suficiente na maioria dos problemas.

Podemos também calcular outras transformadas de distância usando f_{sum} e $\delta(p,q)$ dado por uma das métricas acima, exceto a Euclideana.

Observe que a transformada de distância Euclideana pode ser usada para **dilatar/erodir** o objeto durante a IFT. Considerando A um disco de raio ρ, por exemplo, o objeto dilatado por este disco pode ser obtido pela propagação dos valores dos pixels da borda para o fundo definindo uma nova imagem $\hat{J} = (D_I, J)$, onde $J(p) = 1$ se $I(p) = 1$, ou $I(p) = 0$ mas o custo $C(p) \leq \rho^2$. A imagem $\hat{J}$ pode ser obtida mais eficientemente interrompendo a propagação de pixels p com $C(p) > \rho^2$.

A **dimensão fractal** da borda de um objeto é uma medida que pode ser obtida da transformada de distância Euclideana. A dimensão fractal de um conjunto S dada por Minkowski-Bouligang é um número $F \in [0,2]$:

$$F \;=\; 2 - \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln Ar(\rho)}{\ln \rho}, \tag{6}$$

onde $Ar(\rho)$ é a área de S dilatada por um disco de raio ρ. Note que esta área é simplesmente o histograma acumulado da imagem de custos $\hat{C}$. Se aproximarmos os valores de $\ln Ar(\rho)$ por um polinômio em $\ln \rho$, então o limite acima pode ser calculado como a derivada de primeira ordem deste polinômio e a dimensão fractal passa a ser uma curva em vez de um número. Esta curva representa **dimensões fractais em multiescala**; i.e. dimensões fractais da borda para várias escalas de filtragem da borda por dilatações exatas; e tem se mostrado muito útil em classificação de padrões e recuperação de imagens por conteúdo.

4 Exercícios

Escreva os algoritmos baseados na IFT, incorporando as dicas de eficiência dadas acima, para:

1. Calcular a transformada de distância Euclideana de um conjunto S.

2. Calcular a transformada de distância geodésica, usando chamfer, de um conjunto S dado no interior de um objeto.

3. Calcular o caminho geodésico entre dois conjuntos, origem S e destino D, dados no interior de um objeto.

4. Calcular a dilatação de um objeto por um disco de raio ρ.

5. Calcular a erosão de um objeto por um disco de raio ρ.